

УДК 514
ББК 22.151.34
М 34

Рецензенттер:

- Ж. Баласагын атындагы Кыргыз Улуттук Университетинин математика, информатика жана кибернетика факультетинин деканы, физ.- мат. илимдеринин доктору, профессор Чекеев А.А.,
- физ. – мат. илимдеринин доктору, профессор Алыбаев К.С.
- физ. – мат. илимдеринин доктору, профессор Сатаров Ж.

Матиева Гүлбадан

М 34 Проективдик геометрия: Окуу колдонмосу (лекциялар) –
Ош: 2012. – 176 б.

ISBN 978-9967-03-768-7

Окуу колдонмосу университеттерде жана педагогикалык жогорку окуу жайларда “математика”, “математика жана информатика” адистиктери боюнча окуган студенттер, окутуучулар жана мектептин математика мугалимдери үчүн даярдалган

Мукабада: М. Эшер, Күн жана ай. Жыгачтагы беш түстүү гравюра, 1960.

Б 1602050000-12

ISBN 978-9967-03-768-7

УДК 514
ББК 22.151.3

© Ош мамлекеттик
университети, 2012

Киришүү

Проективдик геометриянын булактары XV кылымда пайда боло баштаган. XIX кылымга чейин проективдик геометрияны евклиддик геометриянын бөлүгү катары карашкан. XIX кылымдын экинчи жарымында гана проективдик геометрия өз алдынча дисциплинага айланган.

Окуу колдонмосунда проективдик тегиздиктин, б.а. эки ченемдүү проективдик мейкиндиктин геометриясынын негизги фактылары камтылган. Окуу колдонмосу геометриянын өнүгүү тарыхын жана анын эмнени үйрөтө тургандыгын баяндоо менен башталат. Проективдик мейкиндик түшүнүгү вектордук мейкиндик түшүнүгүнө жана вектордук алгебранын негизги түшүнүктөрүнө негизделип аныкталган, б.а. проективдик мейкиндиктин аксиоматикалык аныктоосу берилген. Ар бир лекциялык материалдын акырында мисалдар чыгарылыштары менен келтирилген жана студенттердин өз алдынча иштөөсү үчүн маселелер сунушталган.

Окуу колдонмодо проективдик геометриянын методдорун колдонуу менен чыгарылган элементардык математиканын маселелери да камтылган. Бул болсо мектептин болочок математик мугалимдеринин кесиптик компетенттүүлүктөрүнүн калыптанышына өбөлгө түзүшү шексиз.

Автор

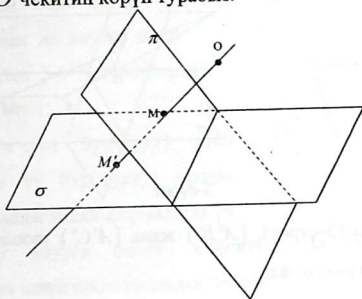
**1-лекция. Проективдик геометриянын пайда болушу.
Борбордук проекциялоо. Проективдик
геометриянын предмети.**

Проективдик геометриянын булактары XV кылымдарда пайда боло баштаган. Кайра жаралуу доорунда көркөм сүрөт искусствосунун өсүп-өнүгүшү перспектива түшүнүгүн жана анын эрежелерин теориялык жактан изилдөөлөрдүн келип чыгышына түрткү берген. Ошол мезгилден баштап бүгүнкү күндө чийүү геометриясы деп аталган атайын илимдин калыптанышына чейин үч жүз жылдан ашуун убакыт өткөн. Себеби, XV-XVI кылымдарда техниканын талаптары анча күчтүү эмес эле жана так, техникалык чийүүгө (анын теориялык негизделиши турмак) зарылчылык да болгон эмес. Ошондуктан перспектива жөнүндөгү (бүгүнкү күндө проективдик геометрия деп аталган) илимдин идеялары менен мыйзам-ченемдүүлүктөрү канчалык жалпы жана маанилүү экендиги тууралуу Кайра жаралуу доорунун сүрөтчүлөрүнүн оюна да келбеген.

Биринчи кадамды (1639-жылы) француз архитектору Ж. Дезарг менен Б. Паскаль (1640-жылы) жасашкан. Алар евклиддик тегиздиктеги жана евклиддик мейкиндиктеги фигуралардын борбордук проекциялоодогу сактала турган (өзгөрбөй турган) касиеттерин изилдешкен.

Борбордук проекциялоо кандайча ишке ашырыла тургандыгын карап көрөлү. 1-сүрөттө π жана σ тамгалары

менен белгиленген эки тегиздикти жана бул тегиздиктерде жатпаган O чекитин көрүп турабыз.

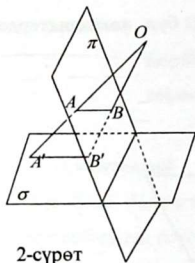


1-сүрөт

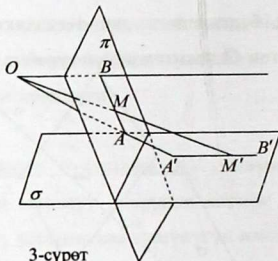
π тегиздигинде жаткан каалагандай M чекитин алабыз. (OM) түз сызыгын жүргүзөбүз жана $(OM) \cap \sigma = M'$ чекитин табабыз. Ушул M' чекити $M \in \pi$ чекитинин σ тегиздигиндеги проекциясы болот (O - проекциялоонун борбору). M чекитине анын проекциясы болгон M' чекитин тиешелештикке коелу. Анда π жана σ тегиздиктеринин ортосунда “*борбордук проекциялоо*” деп аталган тиешелештик орун алат.

Эгерде π тегиздигинде F фигурасы берилсе, анда F фигурасынын бардык чекиттеринин проекцияларынын көптүгү σ тегиздигинде F фигурасынын проекциясы деп аталат.

Проекциялоонун борбору катары ар түрдүү чекиттерди алуу жана σ тегиздигинин абалын өзгөртүү менен биз F фигурасынын ар түрдүү проекцияларына ээ болобуз. Мисалы, $[AB]$ кесиндисинин проекциясы $[A'B']$ кесиндиси (2-сүрөт),



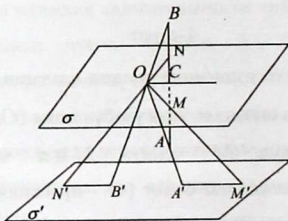
2-сүрөт



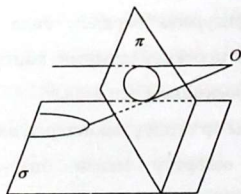
3-сүрөт

$[A'B']$ шооласы (3-сүрөт), $[A'B']$ жана $[A'C']$ шоолалары (4-сүрөт) болушу мүмкүн экен.

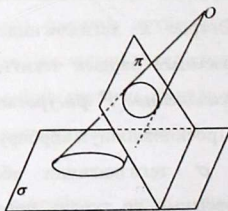
Демек, кесинди түшүнүгү борбордук проекциялоодо сакталбайт экен. “Арасында жатат” түшүнүгү жана үч чекиттин жөнөкөй катышы да борбордук проекциялоодо сакталбайт (4-сүрөт).



4-сүрөт

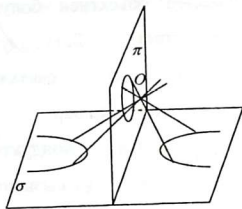


5-сүрөт



6-сүрөт

Айлананы проекциялап, эллипсти, параболаны жада калса гиперболаны да алууга боло тургандыгын 5-6-7- сүрөттөрдөн көрүүгө болот.



7-сүрөт

Туура үч бурчтукту (тең капталдуу үч бурчтукту) проекциялап, каалагандай формадагы үч бурчтукту алууга болот. Ошентип, фигуранын көптөгөн касиеттери анын проекциясына “өтпөйт” экен. Ушуга эле окшош, фигура менен байланышкан көптөгөн чоңдуктар да (кесиндинин узундугу, бурчтун чоңдугу, үч чекиттин жөнөкөй катышы, ж.б.) борбордук проекциялоодо сакталбайт экен.

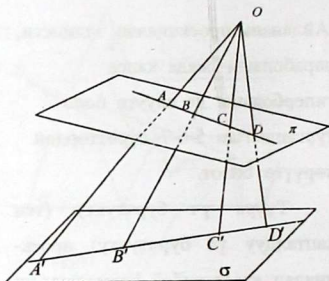
Экинчи жактан фигуралар борбордук проекциялоодо өзгөрбөй турган (сактала турган) касиеттерге да ээ болушат жана фигураларга байланыштуу *кээ бир чоңдуктар да ар кандай борбордук проекциялоодо сакталышат.*

Ушундай касиеттер жана чоңдуктар борбордук проекциялоонун *инварианттары* деп аталышат. Фигуралардын ушундай касиеттерин, б.а. ар кандай борбордук проекциялоодо *инварианттык касиеттерин* француз геометри Ж. Понселе (1788-1867) *проективдик касиеттер* деп атаган жана аларды проективдик геометриянын изилдөө объектилери катары караган.

Мисалы, түз сызык борбордук проекциялоодо түз сызыкка өтөт (8-сүрөт). Демек түз сызык проективдик геометриянын

изилдөө объектиси болуп эсептелинет. Борбордук проекциялоодо сактала турган чондуктар бар.

Ушундай чондукту Дезарг тапкан: түз сызыкта жатышкан төрт чекиттин татаал катышы борбордук проекциялоодо өзгөрбөйт.



8-сүрөт

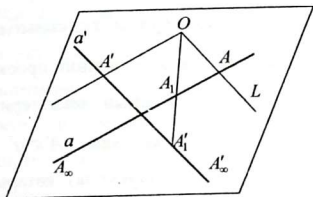
Фигуралардын проективдик касиеттерин изилдөөнүн үстүндө көптөгөн геометрлер иштепкен. Ж. Понселеден кийин француз геометри М. Шаль жана швейцариялык геометр Я.Штейнер бир топ ийгиликтерди жаратышкан. Бирок бул экөө тең Ж. Понселе сыяктуу эле проективдик геометрияны евклиддик геометриянын бөлүгү катары карашкан. XIX кылымдын экинчи жарымында гана проективдик геометрия өз алдынча дисциплинага айланды. Бул өзгөрүүнүн негизги себеби катары «өздүк эмес» (же “чексиз алыстатылган”) геометриялык элементтердин киргизилиши эсептелет.

Көрсө, борбордук проекциялоо методун евклиддик мейкиндикте колдонуу бир топ кыйынчылыктарга дуушар болот экен.

Адегенде жөнөкөй учурду карайлы. E_3 мейкиндигинде эки кесилишүүчү a жана a' түз сызыктарын жана бул түз

сызыктарда жатпаган, бирок ушул эки түз сызык менен аныкталган тегиздикте жаткан O чекитин алалы (9-сүрөт).

O чекитинен a түз сызыгынын чекиттерин a' түз сызыгына проекциялайлы. $A_1 \in a$ чекитин алып, (OA_1) түз сызыгын жүргүзөбүз, $(OA_1) \cap a' = A'_1$,



$A'_1 - A_1 \in a$ чекитинин a'

9-сүрөт

түз сызыгындагы проекциясы.

$f : a \rightarrow a'$ чагылтуусу өз ара бир маанилүү чагылтуу болбой тургандыгын оной эле көрүүгө болот. Чындыгында эле, a түз сызыгындагы A чекитинин элеси a' түз сызыгында жашабайт: $A = (OL) \cap a$, $(OL) \parallel a'$ жана a' түз сызыгында ушундай A' чекити бар, ал a түз сызыгында алгачкы элеске ээ эмес, б.а. A' чекити проекциясы боло тургандай a түз сызыгында жаткан чекитти көрсөтө албайбыз, себеби $a \parallel (OA')$ болгондуктан, бул эки түз сызык евклиддик мейкиндикте кесилишпейт. Демек, евклиддик тегиздикте биз борбордук проекциялоодо a жана a' түз сызыктарынын ортосунда өз ара бир маанилүү чагылтуу орун алышы жөнүндө сөз кыла албайбыз, б.а. a түз сызыгынын проекциясын таба албайбыз, себеби анын бир A чекитинин проекциясын таба албайбыз. a' түз сызыгын a түз сызыгынын проекциясы деп атай албайбыз, себеби $A' \in a'$

чекити a түз сызыгынын эч бир чекитинин проекциясы боло албайт. Борбордук проекциялоонун ушул “мүчүлүштүгүн” жоюш үчүн a жана a' түз сызыктарынын ар бирине “өздүк эмес” чекиттерди кошобуз. a' түз сызыгына A'_∞ чекитин кошуу менен бул чекитти $A \in a$ чекитинин проекциясы катары эсептейбиз. Ал эми a түз сызыгынын чекиттерине A_∞ өздүк эмес чекитин кошуп алабыз да, аны $A' \in a'$ чекитинин алгачкы элеси ($f: a \rightarrow a'$ чагылтуусунда) катары эсептейбиз. Төмөндөгүдөй белгилөөлөрдү киргизели:

$$\bar{a} = a \cup \{A_\infty\}, \bar{a}' = a' \cup \{A'_\infty\}$$

Эми \bar{a} түз сызыгын \bar{a}' түз сызыгына борбордук проекциялоо өз ара бир маанилүү чагылтуу болуп калат. \bar{a} түз сызыгы *кеңейтирилген түз сызык* деп аталат. Бул түз сызыкты *проективдик түз сызык* деп да аташат. Ошентип, евклиддик мейкиндиктеги ар бир түз сызыкка өздүк эмес чекит кошулат. Параллель түз сызыктар бир гана (жалпы) өздүк эмес чекит менен толукталышат.

Евклиддик тегиздиктеги бардык өздүк эмес чекиттердин көптүгү өздүк эмес түз сызык деп аталат жана a_∞ көрүнүшүндө белгиленет. Өздүк эмес түз сызык менен толукталган Π евклиддик тегиздиги кеңейтирилген тегиздик деп аталат жана $\bar{\Pi} = \Pi \cup a_\infty$ көрүнүшүндө белгиленет.

Кеңейтирилген евклиддик тегиздикти проективдик тегиздик деп да аташат. Ошентип евклиддик мейкиндиктеги ар бир

тегиздик өздүк эмес түз сызык менен толукталды. E_3 мейкиндигиндеги бардык өздүк эмес чекиттердин көптүгү *өздүк эмес тегиздик* деп аталат жана Π_∞ көрүнүшүндө белгиленет. Өздүк эмес тегиздик менен толукталган евклиддик мейкиндикти *кеңейтирилген евклиддик мейкиндик* деп аташат.

Кеңейтирилген тегиздикте ар кандай эки түз сызык кесилишет (же өздүк чекитте же өздүк эмес чекитте). Жогорудагыга окшош эле кеңейтирилген аффиндик түз сызык, кеңейтирилген аффиндик тегиздик жана кеңейтирилген аффиндик үч ченемдүү мейкиндик түшүнүктөрүн киргизүүгө болот.

Борбордук проекциялоодо өздүк эмес (чексиз алыстатылган) чекиттер кадимки (өздүк) чекиттерге өтүшү мүмкүн, б.а. проективдик геометрияда чексиз алыстатылган чекиттер менен кадимки чекиттердин айырмачылыгы жок, алар “бирдей укуктуу”. Бирок, проективдик геометрия евклиддик геометриянын бөлүгү катары каралып келген мезгилдерде бул тең укуктуулук жасалма (табигый эмес) мүнөзгө ээ болгон. Себеби, евклиддик геометриянын методдору ченөөлөргө негизделген, ал эми метрика сөзсүз түрдө кадимки чекиттер менен өздүк эмес (чексиз алыстатылган) чекиттердин арасындагы айырмачылыкка алып келет.

Проективдик геометрияны ченөөлөрдү колдонуудан куткаруу маселеси XIX кылымдын акырында чечилген. Бул

маселени чечүүгө немец математиги К. Штаудт (1798-1867) чоң салым кошкон.

Метрикадан куткарылган проективдик геометрия өзүнчө дисциплинага айланып, ал өзүнүн аксиоматикасына жана изилдөө обьектилерине ээ болот. XX кылымдын башталышында проективдик мейкиндиктин түрдүүчө аксиомалар системалары пайда болот. Биз алардын бири менен таанышабыз. Ал система алгебралык мүнөзгө ээ жана вектордук мейкиндик түшүнүгүнө негизделген. Бул болсо проективдик геометрияны окуп-үйрөнүүдө вектордук алгебранын түшүнүктөрүн колдонууга (демек, окуп-үйрөнүүнү жеңилдетүүгө) мүмкүнчүлүк берет.

Бышыктоо үчүн суроолор

1. Евклиддик мейкиндиктеги фигуралардын борбордук проекциялоодо сактала турган касиеттерин кайсыл окмуштуулар кайсыл мезгилдерде изилдешкен?
2. Борбордук проекциялоо деген эмне?
3. Кесинди түшүнүгү борбордук проекциялоодо сакталабы?
4. Борбордук проекциялоодо сакталбай турган түшүнүктөргө мисал келтиргиле.
5. Фигуранын проективдик касиеттери деп анын кандай касиеттерин аташат?
6. Борбордук проекциялоону евклиддик мейкиндикте колдонуунун кыйынчылыктары эмнеде?

7. “Кеңейтирилген түз сызык” деп кандай фигураны аташат?
8. “Кеңейтирилген тегиздик” деп аталган фигура кандайча аныкталат?
9. Проективдик геометрияны ченөөлөрдү колдонуудан “куткарган” окмуштуу ким болгон?
10. Проективдик геометрия негизделген алгачкы мезгилдерде эмне үчүн аны евклиддик геометриянын бөлүгү катары эсептешкен?

2-лекция. Проективдик мейкиндиктин аксиоматикалык аныктоосу. Проективдик түз сызыктын жана проективдик тегиздиктин моделдери

1. Проективдик мейкиндиктин аксиоматикалык аныктоосу

$P \neq \emptyset$ көптүгүн карайлы. Бул көптүктүн элементтерин шарттуу түрдө чекиттер деп атайбыз жана латын алфавитинин баш тамгалары менен белгилейбиз: A, B, C, \dots . V - чыныгы сандарынын талаасынын үстүндө аныкталган $(n + 1)$ - ченемдүү евклиддик мейкиндик болсун.

$V^* = V \setminus \{\vec{0}\}$ көптүгүн карайбыз. V^* көптүгүнүн элементтерин $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{x}, \vec{y}, \dots$ көрүнүшүндө белгилейбиз. Төмөндөгүдөй $\pi: V^* \rightarrow P$ чагылтуусу берилген болсун: V мейкиндигинин ар

бир нөл эмес векторуна P көптүгүнүн X элементин тиешелештикке коет, б.а. $\pi(\bar{x}) = X \in P, \forall \bar{x} \in V^*$.

Аныктоо. Эгерде төмөндөгүдөй шарттарды канааттандыра тургандай $\pi: V^* \rightarrow P$ чагылтуусу берилген болсо:

- 1) π - сюррективдүү чагылтуу, б.а. каалагандай $A \in P$ элементи үчүн $\pi(\bar{a}) = A$ боло тургандай $\bar{a} \in V^*$ вектору жашайт (P көптүгүнүн ар бир элементинин алгачкы элеси жашайт);
- 2) Эки вектордун элестери ал векторлор коллинеардуу болушкан учурда гана дал келишет, б.а.

$$\pi(\bar{x}) \equiv \pi(\bar{y}) \Leftrightarrow \bar{y} = \lambda \bar{x}, \lambda \neq 0, \lambda \in R,$$

анда $P \neq \emptyset$ көптүгү n ченемдүү проективдик мейкиндик деп аталат.

Бул проективдик мейкиндикти V вектордук мейкиндиги тарабынан жаратылган проективдик мейкиндик деп аташат.

P көптүгүнүн элементтери проективдик мейкиндиктин чекиттери деп аталышат. Эгерде $\pi(\bar{x}) = X$ болсо, анда « \bar{x} вектору $X \in P$ чекитин жаратат» же « $X \in P$ чекити $\bar{x} \in V^*$ вектору тарабынан жаратылган» деп айтышат. 1), 2) шарттар проективдик мейкиндиктин аксиомалары деп аталышат. Эгерде $\bar{x} \in V^*$ вектору $X \in P$ чекитин жаратса, анда $\bar{y} = \lambda \bar{x}$ ($\lambda \neq 0, \forall \lambda \in R$) вектору да ошол эле $X \in P$ чекитин жарата тургандыгы 2) аксиомадан келип чыгат, б.а. $\{\lambda \bar{x}\}$

көптүгү P проективдик мейкиндигинин X чекитин жаратат экен.

Коллинеардуу эмес векторлор ар түрдүү чекиттерди жаратышкандыктан, проективдик мейкиндик чексиз көп чекиттерди кармай тургандыгын көрөбүз. R чыныгы сандар талаасынын ордуна каалагандай башка K талаасын алышыбыз мүмкүн. Эгерде K талаасы чектүү талаа болсо (б.а. чектүү сандагы элементтерди кармаса), анда n -ченемдүү P проективдик мейкиндиги да чектүү сандагы чекиттерди кармай тургандыгын көрсөтүүгө болот.

Биз негизинен эки ченемдүү проективдик мейкиндиктин P_2 касиеттерин окуп, үйрөнөбүз. Проективдик тегиздик үч ченемдүү вектордук мейкиндик тарабынан жаратылат. $W_2 \subset V_3$ камтылуучу вектордук мейкиндигинин нөл векторун чыгарып таштасак, анда $W_2 \setminus \{\vec{0}\}$ көптүгү тарабынан жаратылган чекиттердин көптүгү *проективдик түз сызык* (же бир ченемдүү проективдик мейкиндик P_1) деп аталат.

Үч ченемдүү P_3 проективдик мейкиндиктеги тегиздик эки ченемдүү проективдик мейкиндик болот жана аны *проективдик тегиздик* P_2 деп аташат.

Эскертүү. Проективдик мейкиндиктин аныктоосунда V вектордук мейкиндигинин нөл векторун чыгарып таштадык. Эмне үчүн? деген суроо туулат. Нөл векторду чыгарбай эле коелу жана $\pi : V \rightarrow P$ чагылтуусунда $\pi(\vec{0}) = A$ болсун деп эсептейли.

$\forall \bar{x} \neq \vec{0}, \bar{x} \in V$ векторун алалы. 2) аксиома боюнча $\pi(\bar{x}) = \pi(\lambda \bar{x})$. $\lambda = 0$ деп алсак, анда $\pi(\bar{x}) = \pi(0\bar{x}) = \pi(\vec{0}) = A$, б.а. бардык векторлор бир эле A чекитин жаратышат экен. Бул болсо 1) аксиомага каршы келет.

2. Проективдик түз сызыктын жана проективдик тегиздиктин моделдери

Аныктоо. Эгерде P көптүгүнүн жана V вектордук мейкиндигинин элементтери анык бир жаратылышка ээ болушса жана проективдик мейкиндиктин аныктоосундагы 1), 2) шарттарды канааттандыра тургандай $\pi: V^* \rightarrow P$ чагылтуусу аныкталса, анда P көптүгү *проективдик мейкиндиктин модели* деп аталат.

Проективдик түз сызыктын моделдерин карайлы.

I. Аффиндик же евклиддик тегиздикте C борборлуу түз сызыктардын боосу берилген болсун:

$$\pi(O) = \{a, b, c, \dots\}.$$

P көптүгүнүн ордуна $\pi(O)$ боосун алалы. Вектордук мейкиндик катары тегиздиктеги O чекити башталыш чекити болгон багытталган кесиндилердин көптүгүн алабыз:

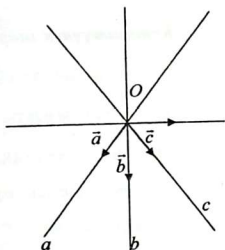
$$V = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots\}.$$

Аналитикалык геометрия курсунан бизге тегиздиктеги багытталган кесиндилердин көптүгү эки ченемдүү вектордук

мейкиндик боло тургандыгы белгилүү. Бул вектордук мейкиндиктин базисин эки коллинеардуу эмес векторлор түзүшөт. $\pi: V^* \rightarrow P$ чагылтуусун төмөндөгү-дөй аныктайбыз:

Ар бир $\vec{a} \in V^*$ векторуна ушул вектор багыттоочу вектору болгон жана O чекити аркылуу өткөн $a \in \pi(O)$ түз сызыгын тиешелештикке коебуз

$$\pi(\vec{a}) = a, \pi(\vec{b}) = b, \dots$$



10-сүрөт

Проективдик мейкиндиктин аксиомаларынын аткарылышын текшерербиз.

1. π чагылтуусу сюръекция болот, себеби боонун каалагандай a түз сызыгын алсак, анда $\pi(\vec{a}) = a \in \pi(O)$ боло тургандай $\vec{a} \in V^*$ вектору табылат (б.а. \vec{a} вектору үчүн $a \in \pi(O)$ түз сызыгынын багыттоочу векторлорунун каалагандай бирин алууга болот).

2. $\pi(\vec{a}) = \pi(\vec{b}) \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$ (б.а. $\vec{b} = \lambda \vec{a}, \lambda \neq 0$) экендигин көрсөтөлү.

Зарылдык шарты. $\pi(\vec{a}) = \pi(\vec{b})$ деп алалы, $\pi(\vec{a}) = a$, $\pi(\vec{b}) = b$ болсун. Анда \vec{a} жана \vec{b} векторлору бир түз сызыкка жатышат (б.а. бир эле түз сызыктын багыттоочу векторлору болушат), мисалы $\vec{a}, \vec{b} \in a$. Демек $\vec{b} \parallel \vec{a}$ же $\vec{b} = \lambda \vec{a}, \lambda \neq 0$.

ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИ
КИТЕПКАНА

ИНВ № 971447

Жетиштүүлүк шарты. Эгерде $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, $\lambda \neq 0$ болсо, \vec{a} , \vec{b} векторлору бир эле түз сызыкка жатышат жана π чагылтуусунда алар бир эле түз сызыкты жаратышат, демек $\pi(\vec{a}) = \pi(\vec{b})$.

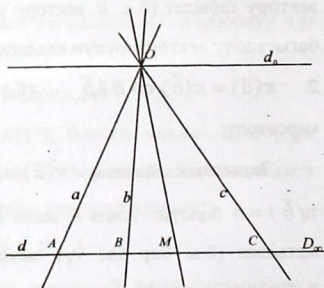
Ошентип, проективдик мейкиндиктин эки аксиомасы тең аткарылат экен. Демек, аффиндик же евклиддик тегиздиктеги түз сызыктардын боосу $\pi(O)$ - бир ченемдүү проективдик мейкиндик, б.а. проективдик түз сызык болот экен. Проективдик түз сызыктын чекиттери болуп боонун түз сызыктары эсептелинет.

II. Аффиндик же евклиддик тегиздикте d түз сызыктын алалы жана $O \notin d$ чекити борбору болгон $\pi(O)$ түз сызыктардын боосун карайбыз. $\varphi: d \rightarrow \pi(O)$ чагылтуусун төмөндөгүдөй эреже боюнча аныктайлы:

$$\forall M \in d: \varphi(M) = (OM), (OM) \in \pi(O).$$

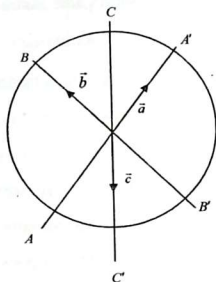
φ чагылтуусу инъективдүү, бирок сюръективдүү эмес, себеби боонун ар бир түз сызыгы үчүн ал түз сызыктын алгачкы элеси боло тургандай чекит d түз сызыгынан табыла бербейт.

Мисалы, $d_0 \in \pi(O)$, $d_0 \parallel d$ түз сызыгы үчүн d түз



11-сүрөт

сызыгында алгачкы элес жашабайт. Демек, φ чагылтуусу – өз ара бир маанилүү (б.а. биекция) эмес. Бул чагылтуу биекция болушу үчүн d түз сызыгына өздүк эмес (чексиз алыстатылган) D_∞ чекитин кошуп алабыз жана $\varphi(D_\infty) = d_0$ деп эсептейбиз. $\bar{d} = d \cup \{D_\infty\}$ көптүгүн карайлы эми $\varphi: \bar{d} \rightarrow \pi(O)$ чагылтуусу өз ара бир маанилүү чагылтуу болот.



12-сүрөт

Түз сызыктардын боосу проективдик түз сызыктын модели боло тургандыгын жогоруда көрдүк. Боонун түз сызыктары менен \bar{d} кеңейтирилген түз сызыгынын чекиттеринин арасында өз ара бир маанилүү тиешелештик жашагандыктан, кеңейтирилген түз сызык да проективдик түз сызыктын модели болот.

III. Евклиддик мейкиндикте O борборлуу айлананы карайлы. Анын диаметралдык карама-каршы чекиттерин дал келтирели, б.а. диаметралдык карама-каршы эки чекитти бир эле чекит катары эсептейбиз

$$P = \{(A, A'), (B, B'), (C, C'), \dots\}$$

Вектордук мейкиндик катары башталышы O чекити болгон $V = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots\}$ багытталган кесиндилердин көптүгүн алабыз (евклиддик тегиздиктеги). $\pi: V^* \rightarrow P$ чагылтуусун

төмөндөгүдөй закон боюнча аныктайлы: $\pi(\vec{a}) = \{(A, A')\}$, мында A, A' - айлананын диаметралдык карама-каршы чекиттери, \vec{a} - (AA') түз сызыгында жаткан вектор. Проективдик мейкиндиктин аныктоосундагы 1), 2) шарттардын (аксиомалардын) орун алышы I моделдегиге окшош эле текшерилет. Ошентип, евклиддик тегиздикте диаметралдык карама-каршы чекиттери дал келтирилген айлана проективдик түз сызыктын модели болот. Бул моделден проективдик түз сызык туюк экендигин көрөбүз. Ошондуктан проективдик түз сызыктын эки чекити кесиндини аныктабайт.

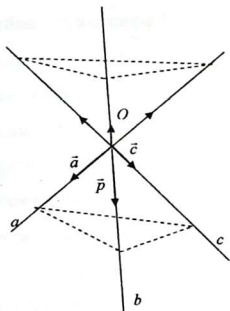
Эми проективдик тегиздиктин моделдерин карайлы.

I. Аффиндик же евклиддик үч ченемдүү мейкиндикте түз сызыктардын байламтасын алалы жана аны $C(O)$ аркылуу белгилейли. $C(O)$ - бир эле O чекити аркылуу өтүүчү мейкиндиктин бардык түз сызыктарынын көптүгү. Бул көптүк проективдик тегиздиктин модели боло тургандыгын көрсөтөлү.

Бул моделде проективдик тегиздиктин чекиттери болуп байламтанын түз сызыктары эсептелинет.

V вектордук мейкиндиги катары башталышы O чекитинде жайланышкан аффиндик мейкиндиктин багытталган кесиндилеринин көптүгүн алалы. $\pi: V^* \rightarrow P$ чагылтуусун төмөндөгүдөй эреже боюнча аныктайбыз: *ар бир нөл эмес \vec{a} векторуна ушул вектор таандык болгон $a \in C(O)$ түз сызыгын тиешелештикке коебуз, б. а. $\pi(\vec{a}) = a, a \in C(O)$.* Ушундайча

аныкталган π чагылтуусу проективдик мейкиндиктин аныктоосундагы 1), 2) шарттарды канааттандыра тургандыгын оңой эле көрсөтүүгө болот. $C(O)$ байламтасынын боолору – каралып жаткан моделде проективдик түз сызыктар болуп эсептелинет. Проективдик тегиздикте ар кандай эки түз сызык кесилише тургандыгы ушул моделде ачык көрүнүп турат.



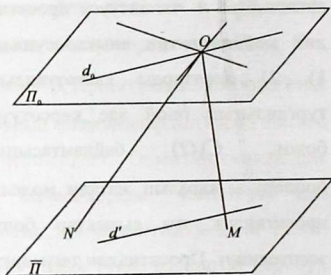
13-сүрөт

II. Аффиндик же евклиддик мейкиндикте тегиздик алабыз да ал тегиздикти өздүк эмес (чексиз алыстатылган) түз сызык менен толуктайбыз. Натыйжада кеңейтирилген тегиздикке $\bar{\Pi} = \Pi \cup d_\infty$ ээ болобуз. $O \notin \Pi$ чекитин алабыз жана $C(O)$ байламтасын карайлы.

$\varphi: C(O) \rightarrow \bar{\Pi}$ чагылтуусун төмөндөгүдөй эреже боюнча аныктайбыз: байламтанын каалагандай түз сызыгына ушул түз сызык менен $\bar{\Pi}$ тегиздигинин кесилиш чекитин тиешелештикке коебуз. φ чагылтуусу өз ара бир маанилүү болот.

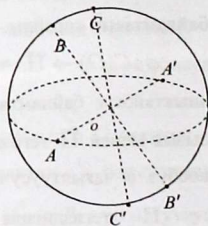
Π тегиздигине параллель болгон $d_0 \in C(O)$ түз сызыгынын ($d_0 \subset \Pi_0 \parallel \Pi$) элеси болуп d' түз сызыгынын өздүк эмес (чексиз алыстатылган) D_∞ чекити эсептелет ($d' \parallel d_0$ жана $d' \subset \bar{\Pi}$).

Аффиндик мейкиндиктеги түз сызыктардын байламтасы проективдик тегиздиктин модели болгондуктан, кеңейтирилген тегиздик да проективдүү тегиздиктин модели болуп эсептелет.



14-сүрөт

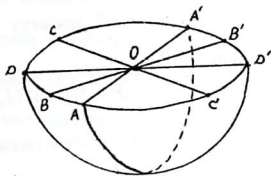
III. Евклиддик мейкиндикте O борборлуу S^2 сферасын карайлы. $C(O)$ байламтасынын ар бир түз сызыгы сфераны эки чекитте кесип өтөт. Байламтанын түз сызыктары менен сферанын чекиттеринин ортосунда өз ара бир маанилүү тиешелештикти орнотуу үчүн сферанын диаметралдык карама-каршы чекиттерин дал келтирип алабыз. Жаңы пайда болгон объекти (нерсени) \bar{S}^2 аркылуу белгилейли. Ушул нерсе \bar{S}^2 - проективдик тегиздиктин модели болуп эсептелинет. Чындыгында эле $C(O)$ байламтасынын түз сызыктары менен \bar{S}^2 фигурасынын чекиттеринин ортосунда бир маанилүү



15-сүрөт

тиешелештикти аныктоого болот. Ал эми түз сызыктардын байламтасы проективдик тегиздиктин модели болгондуктан, \bar{S}^2 дагы проективдик тегиздиктин модели болот.

IV. Евклиддик мейкиндикте жарым сфераны карайлы. Чон айланасында жаткан диаметралдык карама-каршы чекиттерин дал келтирели. Пайда болгон объект проективдик тегиздиктин модели болуп эсептелет. Проективдик түз сызыктын жана проективдик тегиздиктин башка дагы моделдери бар.



16-сүрөт

Жогоруда биз кеңири белгилүү болгон гана моделдерин карадык.

1-Мисал. 2 модулу боюнча чегериштердин талаасын F_2 аркылуу белгилейли. $F_2^2 - F_2$ талаасынын үстүндө аныкталган эки ченемдүү вектордук мейкиндик болсун. $P(F_2^2)$ проективдик түз сызыгы үч чекитти кармай тургандыгын далилдегиле.

Чыгаруу. 2 модулу боюнча чегериштердин талаасы F_2 эки элементти кармайт: 0,1.

Анда $F_2^2 = F_2 \times F_2 = \{ \{0,0\}, \{0,1\}, \{1,0\}, \{1,1\} \}$. Бул көптүк вектордук мейкиндик болот. Векторлорду кошуу жана векторду F_2 талаасынын элементине көбөйтүү амалдары сандарды кошуу жана көбөйтүү амалдарына алынып келинет. Бул

эки амал эки ченемдүү вектордук мейкиндиктин бардык аксиомаларына баш ийет.

Базисти $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ түзгөн векторлор $\bar{e}_1 = \{0, 1\}$, $\bar{e}_2 = \{1, 0\}$ болушат. $F_2^2 \setminus \{\bar{0}\} = V_2^* = \{\{1, 0\}, \{0, 1\}, \{1, 1\}\}$. V_2^* ньш векторлору эки-экиден коллинеардуу болушпай тургандыгы көрүнүп турат. P аркылуу проективдик чекиттердин көптүгүн белгилейли:

$$P = \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\} = \{A, B, C\}$$

$\pi : V^* \rightarrow P$ чагылтуусу төмөндөгүдөй аныкталат:

$$\pi\{0, 1\} = (0, 1), \quad \pi\{1, 0\} = (1, 0), \quad \pi\{1, 1\} = (1, 1).$$

Бул чагылтуу проективдик мейкиндиктин аксиомаларын канааттандырат. $\{0, 1\}, \{1, 0\}, \{1, 1\}$ векторлору эки-экиден коллинеардуу эмес болгондуктан, A, B, C чекиттери ар түрдүү болушат.

2-Мисал. $P(V)$ проективдик тегиздиги жок дегенде 7 чекитти кармай тургандыгын далилдегиле.

Чыгаруу. V_3 - проективдик тегиздикти жаратуучу вектордук мейкиндик, $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ - анын базиси болсун. Векторлордун төмөндөгүдөй системасын карайлы:

$$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_1 + \bar{e}_2, \bar{e}_2 + \bar{e}_3, \bar{e}_1 + \bar{e}_3, \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3.$$

Булардын ичинен каалагандай экөө сызыктуу көз каранды болушпайт. Мисал үчүн, $\bar{e}_1 + \bar{e}_2$ жана $\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$ векторлору сызыктуу көз каранды болушпай тургандыгын көрсөтөлү.

Каршысынча болжолдойлу, б.а. $\alpha(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) + \beta(\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3) = \bar{0}$, мында $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ болсун деп алалы. Акыркы барабардыкты төмөндөгүдөй жазып алабыз:

$$(\alpha + \beta)\bar{e}_1 + (\alpha + \beta)\bar{e}_2 + \beta\bar{e}_3 = \bar{0}.$$

$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ векторлору сызыктуу көз каранды эмес, себеби алар базистик векторлор. Демек, акыркы барабардык $\alpha = \beta = 0$ болгондо гана орун алат. Бул карама-каршылык $\bar{e}_1 + \bar{e}_2$ жана $\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$ векторлору сызыктуу көз каранды эмес экендигин далилдейт.

Ушуга эле окшош калган түгөй векторлордун да сызыктуу көз каранды эмес экендиктерин далилдөөгө болот (окурман өз алдынча далилдесин).

Бул векторлор системасы төмөндөгүдөй чекиттерди жаратат:

$$E_1 = \pi(\bar{e}_1), E_2 = \pi(\bar{e}_2), E_3 = \pi(\bar{e}_3), E_4 = \pi(\bar{e}_1 + \bar{e}_2), \\ E_5 = \pi(\bar{e}_2 + \bar{e}_3), E_6 = \pi(\bar{e}_1 + \bar{e}_3), E_7 = \pi(\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3).$$

E_i ($i = 1, 2, \dots, 7$) чекиттери коллинеардуу эмес векторлор тарабынан жаратылгандыктан, ар түрдүү чекиттер болушат.

3-Мисал. $P(V)$ проективдик тегиздигинде каалагандай үчөө бир түз сызыкка жатышпай турган төрт чекит жашай тургандыгын көрсөткүлө.

Чыгаруу. $\dim(P(V)) = 2$ болгондуктан, бул проективдик тегиздикти жаратуучу вектордук мейкиндик V үч ченемдүү болот. $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ ушул вектордук мейкиндиктин базиси

болсун. Анда $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ векторлору сызыктуу көз каранды болушпайт. Демек, бул векторлор тарабынан жаратылган E_1, E_2, E_3 чекиттери бир түз сызыкка жатышпайт. $E_1 = \pi(\vec{e}_1)$, $E_2 = \pi(\vec{e}_2)$, $E_3 = \pi(\vec{e}_3)$ $E_4 = \pi(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$, $E_5 = \pi(\vec{e}_2 + \vec{e}_3)$ чекиттерин карайлы.

E_1, E_2, E үч чекити бир түз сызыкка жатышпай тургандыгын көрсөтөлү. Ал үчүн бул чекиттерди жаратуучу $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}$ векторлору ($\vec{e} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$) сызыктуу көз каранды эмес экендигин көрсөтүү жетиштүү.

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}$ векторлору сызыктуу көз каранды деп болжолдойлу. Сызыктуу көз карандылыктын аныктоосу боюнча төмөндөгүнү алабыз:

$$\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e} = \vec{0}, \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \neq 0.$$

Мындан

$$\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 (\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = \vec{0}$$

же

$$(\lambda_1 + \lambda_3) \vec{e}_1 + (\lambda_2 + \lambda_3) \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3 = \vec{0}$$

келип чыгат. Базистик векторлор $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ - сызыктуу көз каранды эмес болушкандыктан акыркы барабардык $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ болгондо гана орун алат. Биздин болжолдообуз туура эмес экен. Демек, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}$ векторлору сызыктуу көз каранды эмес, ал эми E_1, E_2, E чекиттери бир түз сызыкка жатышпайт.

E_1, E_3, E жана E_2, E_3, E чекиттери да бир түз сызыкта жатышпай тургандыгы жогорудагыга окшош эле далилденет.

Өз алдынча иштөө үчүн маселелер

1. F_3 - үч модулу боюнча чегериштердин талаасы, $F_3^3 = F_3 \times F_3 \times F_3$ - үч ченемдүү вектордук мейкиндиги (F_3 талаасынын үстүндө аныкталган) берилген. Ушул вектордук мейкиндик тарабынан жаратылган проективдик $P(F_3^3)$ тегиздигинин каалагандай түз сызыгы канча чекитти кармайт?
2. $P(F_2^3)$ проективдик тегиздиги канча түз сызыкты кармап турат?
3. Проективдик түз сызык жок дегенде үч чекитти кармап тургандыгын далилдегиле.
4. Проективдик тегиздикте бир түз сызыкта жатышпаган үч чекит жашай тургандыгын далилдегиле.
5. Проективдик тегиздиктин каалагандай эки түз сызыгы кесилише тургандыгын далилдегиле.
6. Проективдик тегиздиктин эки ар түрдүү чекити аркылуу түз сызык жүргүзүүгө, мүмкүн экендигин далилдегиле.
7. K талаасынын үстүндө аныкталган $P_3(K)$ проективдик мейкиндигинин чекиттеринин эң кичине саны канча?

8. n - ченемдүү проективдик мейкиндикте жалпы абалдагы $n + 2$ чекит жашай тургандыгын далилдегиле.

9. F_p - p модулу боюнча чегериштердин талаасы, F_p^{n+1} - ушул талаанын үстүндө аныкталган $(n + 1)$ - ченемдүү вектордук мейкиндик болсун (p - жөнөкөй сан). n - ченемдүү $P(F_p^{n+1})$ проективдик мейкиндиги $\frac{p^{n+1} - 1}{p - 1}$ даана чекиттерди кармай тургандыгын далилдегиле.

10. n - ченемдүү $P(F_p^{n+1})$ проективдик мейкиндигинин каалагандай түз сызыгы канча чекитти кармап турат?

3-лекция. * Проективдик репер. Чекиттин проективдик координаталары. Түз сызыктын теңдемеси.

I. Аныктоо. *Проективдик түз сызыкта проективдик репер* деп ушул түз сызыктын ирети менен алынган үч ар түрдүү чекитин атайбыз жана $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, E\}$ көрүнүшүндө белгилейбиз. A_1, A_2 - проективдик репердин координаталык чекиттери, ал эми E - бирдик чекити деп аталышат.

P_1 проективдик түз сызыгынын каалагандай M чекитин алабыз. V_2 - P_1 проективдик түз сызыктын жаратуучу вектордук мейкиндик болсун. Бул мейкиндиктин $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, E\}$ реperi менен "макулдашылган" $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ базисин алабыз.

$$\pi(\bar{e}_1) = A_1, \pi(\bar{e}_2) = A_2, \pi(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) = E$$

$M \in P$ чекитин жаратуучу вектор $\bar{m} \in V_2$, $\bar{m} \neq \bar{0}$ болсун, б.а. $\pi(\bar{m}) = M$. Ушул \bar{m} векторун базистик векторлор аркылуу ажыраталы:

$$\bar{m} = x^1 \bar{e}_1 + x^2 \bar{e}_2, \bar{m} = (x^1, x^2)_{\mathfrak{R}}.$$

Аныктоо. P_1 проективдик түз сызыгынын M чекитинин \mathfrak{R} проективдик реперине карата *проективдик координаталары* деп ушул \bar{m} векторунун \mathfrak{R} реperi менен макулдашылган базике карата координаталарын айтабыз жана $M(x^1, x^2)_{\mathfrak{R}}$ көрүнүшүндө белгилейбиз. Башка бир $\bar{m}' = \lambda \bar{m}$ ($\lambda \neq 0$) векторун алалы. Бул вектор дагы M чекитин жаратат: $\pi(\bar{m}') = M$, $\bar{m}' = \lambda x^1 \bar{e}_1 + \lambda x^2 \bar{e}_2$. Чекиттин проективдик координаталарынын аныктоосунан $M \in P_1$ чекити \mathfrak{R} реперине карата $(\lambda x^1, \lambda x^2)$ координаталарына ээ боло тургандыгын көрөбүз.

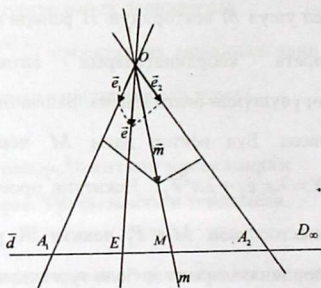
Ошентип проективдик түз сызыктагы чекиттин проективдик координаталары турактуу көбөйтүүчүгө чейинки тактыкта аныкталат экен.

1-Мисал. Кеңейтирилген \bar{d} түз сызыгында $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, E\}$ реperi берилген. Ушул реперде $M(2,3) \in \bar{d}$ чекитин координаталары боюнча аныктагыла.

Чыгаруу. \bar{d} түз сызыгын жаратуучу вектордук мейкиндик V_2 болсун: $\pi(V_2 \setminus \{\bar{0}\}) = \bar{d}$. V_2 мейкиндиги үчүн башталыштары

$O \notin \bar{d}$ чекити болгон багытталган кесиндилердин көптүгүн алабыз. $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ аркылуу V_2 вектордук мейкиндигинин базисин белгилейли жана бул базис $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, E\}$ репери менен макулдашылган базис болсун. (Бул базисти \mathfrak{R} проективдик реперин жаратуучу базис деп да айтышат [6].) Маселени чыгарууну төмөндөгүдөй ирет менен жүргүзөбүз.

1. $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, E\}$ реперин жаратуучу базисти аныктап алабыз. Ал үчүн E чекитин жаратуучу каалагандай \bar{e} векторун алабыз жана суммасы \bar{e} векторун бере, тургандай \bar{e}_1, \bar{e}_2 векторлорун табабыз.



17-сүрөт

$B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ - проективдик реперди жаратуучу базис болот.

\bar{e}_1, \bar{e}_2 векторлору тиешелеш түрдө A_1, A_2 чекиттерин жаратышат (17-сүрөт).

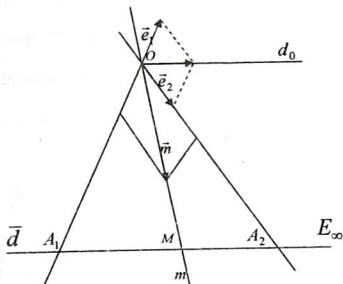
2. $\bar{m} = 2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2$ векторун табабыз.

3. \bar{d} түз сызыгы менен $m = (O, \bar{m})$ түз сызыгынын кесилиш чекити \bar{m} вектору тарабынан жаратылган M чекити болот.

2-Мисал. \bar{d} кеңейтирилген түз сызыгында $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, E_\infty\}$ проективдик репер берилген. \mathfrak{R} реперине карата $M(-1, 2)$ чекитин түзгүлө.

Чыгаруу. 1) $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, E_\infty\}$ проективдик реперин жаратуучу вектордук базисти табабыз.

E_∞ - \bar{d} түз сызыгынын өздүк эмес (чексиз алыстатылган) чекити болгондуктан, бул чекитти жаратуучу вектор d_0 түз сызыгынын багытоочу вектору болот (мында $d_0 \parallel \bar{d}$). $O \in d_0$ чекитин жана \mathfrak{R} реперин менен макулдашылган



18-сүрөт

$B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ базисин алабыз: $\pi(\bar{e}_1) = A_1$, $\pi(\bar{e}_2) = A_2$, $\pi(\bar{e}) = E_\infty$. (18-сүрөт).

2) $\bar{m} = -\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$ векторун түзөбүз.

3) $M = m \cap \bar{d}$.

2. Проективдик тегиздикте чекиттин проективдик координаталарын аныктайбыз.

Аныктоо. *Проективдик тегиздикте проективдик репер* деп ирети менен алынган жалпы абалдагы төрт чекитти (б.а.

каалагандай үчөө бир түз сызыкта жатышпаган) атайбыз жана $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ көрүнүшүндө белгилейбиз.

Проективдик тегиздикти жаратуучу вектордук мейкиндиктин $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ базисин \mathfrak{R} репери менен макулдашылган (б.а. $\pi(\bar{e}_1) = A_1$, $\pi(\bar{e}_2) = A_2$, $\pi(\bar{e}_3) = A_3$, $\pi(\bar{e}) = E$, $\bar{e} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$) деп эсептейбиз (19-сүрөт).

P_2 проективдик тегиздигинин каалагандай M чекитин алалы. Бул чекитти жаратуучу векторду \bar{m} аркылуу белгилейбиз: $\pi(\bar{m}) = M$. Векторлордун $\bar{m}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ системасы сызыктуу көз кранды болгондуктан

$$\bar{m} = x^1 \bar{e}_1 + x^2 \bar{e}_2 + x^3 \bar{e}_3$$

барабардыгына ээ болобуз.

Аныктоо. Проективдик тегиздиктеги M чекитинин проективдик \mathfrak{R} реперине карата **проективдик координаталары** деп ушул чекитти жаратуучу вектордун \mathfrak{R} репери менен макулдашылган базиске карата координаталарын айтабыз.

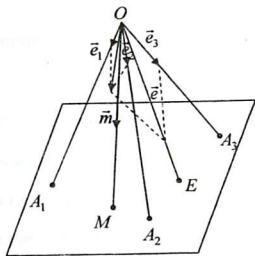
$M \in P_2$ чекити \mathfrak{R} проективдик реперине карата (x^1, x^2, x^3) координаталарына ээ болот. $\bar{m}' = \lambda \bar{m}$, ($\lambda \neq 0$) вектору деле M чекитин жараткандыктан жана $\bar{m}' = \lambda x^1 \bar{e}_1 + \lambda x^2 \bar{e}_2 + \lambda x^3 \bar{e}_3$ орун алгандыктан M чекити \mathfrak{R} реперине карата $(\lambda x^1, \lambda x^2, \lambda x^3)$ координаталарына да ээ болот.

Ошентип, проективдик тегиздиктеги чекиттин проективдик координаталары турактуу көбөйтүүчүгө чейинки тактык менен аныкталат экен.

Берилген координаталары боюнча чекитти түзүү маселесин карайлы.

$\overline{\Pi}$ проективдик тегиздигинде $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ проективдик реperi берилген болсун. Проективдик тегиздиктин A_1, A_2, A_3 чекиттеринин жана $(A_1, A_2), (A_1, A_3), (A_2, A_3)$ түз сызыктарынын жыйындысы координаталык үч чокулук (үч бурчтук) деп аталат.

$M \in \overline{\Pi}$ чекити x^1, x^2, x^3 координаталары менен берилген болсун. $\overline{\Pi} \setminus A_3$ көптүгүн (A_1A_2) координаталык түз сызыгына чагылтууну карайлы, б.а. бул көптүктү (A_1A_2) түз сызыгына A_3 борборунан проекциялоону карайбыз.



19-сүрөт

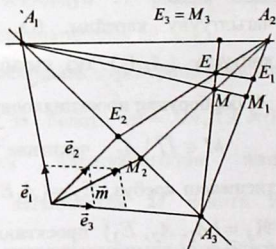
$M \in \overline{\Pi} \setminus A_3$ чекитине $M_3 = (A_3M) \cap (A_1A_2)$ чекитин тиешелеш коебуз, $E_3 = (A_3E) \cap (A_1A_2)$. (A_1A_2) түз сызыгында $\mathfrak{R}_3 = \{A_1, A_2, E_3\}$ проективдик реперин карайбыз. Көрсө M_3 чекити \mathfrak{R}_3 проективдик реперине карата (x^1, x^2) координаталарына ээ болот экен.

Эми $\overline{P} \setminus A_1$ көптүгүн (A_2A_3) түз сызыгына A_1 чекитинен проекциялоону карайлы. $M \in \overline{P} \setminus A_1$ чекитине $M_1 = (A_1M) \cap (A_2A_3)$ чекити тиешелеш коюлат. (A_2A_3) проективдик түз сызыгында $\mathfrak{R}_1 = \{A_2, A_3, E_1\}$ проективдик реperi пайда болот (мында $E_1 = (A_1E) \cap (A_2A_3)$). M_1 чекити (A_2A_3) түз сызыгындагы \mathfrak{R}_1 реперине карата (x^2, x^3) координаталарына ээ болот. Ушуга эле окшош $M_2 = (A_2M) \cap (A_1A_3)$ чекити (A_1A_3) түз сызыгындагы $\mathfrak{R}_2 = \{A_1, A_3, E_2\}$ реперине карата (x^1, x^3) координаталарына ээ болот.

Анда $M^* = (A_1M_1) \cap (A_2M_2) \cap (A_3M_3)$.

3-Мисал. Кеңейтирилген \overline{P} тегиздигинде $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ проективдик реperi берилген. Бул реперге карата $M(1, 1, 2)$ чекитин түзгүлө.

Чыгаруу. E_3 аркылуу \mathfrak{R} реперинин E бирдик чекитинин (A_1A_2) түз сызыгындагы проекциясын $(A_3$ борборунан проекциялоодогу) белгилейли. Иреттелген A_1, A_2, E_3 үч



20-сүрөт

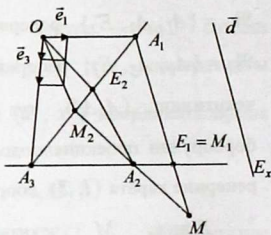
чекити (A_1A_2) түз сызыгында $\mathfrak{R}_3 = \{A_1, A_2, E_3\}$ проективдик реперин аныкташат. $M_3 - M$ чекитинин (A_1A_2) түз сызыгындагы проекциясы $(A_3$ борборунан проекциялоодогу) болсун. Бул M_3 чекити \mathfrak{R}_3 реперине карата $(1, 1)$ координаталарына ээ болот, б.а. M_3 чекити E_3 чекити менен дал келет. Ушуга эле окшош (A_1A_3) түз сызыгында $\mathfrak{R}_2 = \{A_1, A_3, E_2\}$ реперин, ал эми (A_2A_3) түз сызыгында $\mathfrak{R}_1 = \{A_2, A_3, E_1\}$ реперин аныктоого болот. M_2 аркылуу M чекитинин (A_1A_3) түз сызыгындагы проекциясын $(A_2$ борборунан проекциялоодогу) белгилейли. Анда бул чекит \mathfrak{R}_2 реперине карата $(1, 2)$ координаталарына ээ болот.

Демек, M чекити (A_3M_3) жана (A_2M_2) түз сызыктарынын кесилиш чекити болот (20-сүрөттү карагыла).

4-Мисал. Кеңейтирилген $\overline{\Pi}$ тегиздигинде проективдик репери $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E_\infty\}$ берилген, мында A_1, A_2, A_3 - өздүк (кадимки) чекиттер, ал эми E_∞ - өздүк эмес (чексиз алыстатылган) чекит. Ушул \mathfrak{R} реперине карата $M(1, 1, 2)$ чекитин түзгүлө.

Чыгаруу. E_∞ - кеңейтирилген \overline{d} түз сызыгынын өздүк эмес чекити болсун деп эсептейли. A_1 чекитинен (A_2A_3) түз сызыгына проекциялоодогу E_∞ чекитинин проекциясын E_1 аркылуу белгилейли. E_1 чекитин табуу үчүн $\overline{\Pi}$ тегиздигинде A_1

чекити аркылуу \bar{d} түз сызыгына параллель болгон түз сызыкты жүргүзөбүз. Ушул түз сызык (A_2A_3) түз сызыгы менен кесилишкенде E_1 чекити пайда болот жана $E_1 \equiv M_1$. Мында M_1 - M чекитинин (A_2A_3) түз сызыгындагы проекциясы $(A_1$ борборунан проекциялоодогу). $E_2 = (A_2E_\infty) \cap (A_1A_3)$ чекитин табабыз. Ал үчүн A_2 чекити аркылуу \bar{d} түз сызыгына параллель түз сызык жүргүзөбүз. Ушул түз сызык (A_1A_3) түз сызыгын E_2 чекитинде кесип өтөт. $M_2(1, 2)$ чекитин координаталары боюнча $\mathfrak{R}_2 = \{A_1, A_3, E_2\}$ реперине карата түзөбүз. Анда $M = (A_1M) \cap (A_2M)$ экендиги келип чыгат (21-сүрөттү карагыла).



21-сүрөт

Өз алдынча иштөө үчүн маселелер

1. \bar{d} кеңейтирилген түз сызыгында $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, E\}$ проективдик репери берилген. Бул реперге карата координаталары менен берилген $M(-2, 1)$ чекитин түзгүлө.
2. \bar{d} кеңейтирилген түз сызыгында $\mathfrak{R} = \{A_1, M_\infty, E\}$ проективдик репери берилген. Бул реперге карата

координаталары менен берилген $M(2, 1)$ чекитин түзгүлө.

3. \bar{d} кеңейтирилген түз сызыгында $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, E\}$ проективдик репери берилген, мында $E - [A_1, A_2]$ кесиндисинин орто чекити. \mathfrak{R} реперине карата \bar{d} түз сызыгынын M_∞ өздүк эмес чекитинин координаталарын тапкыла.

4. \bar{d} кеңейтирилген түз сызыгында A_1, A_2 чекиттери берилген. Эгерде $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, E\}$ проективдик реперине карата \bar{d} түз сызыгынын M_∞ өздүк эмес чекити $(-1, 2)$ координаталарына ээ экендиги белгилүү болсо, репердин E бирдик чекитин түзгүлө.

5. $\bar{\Pi}$ кеңейтирилген тегиздигинде $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ проективдик репери берилген. Бул реперге карата координаталары менен берилген $M(1, 2, 1)$ чекитин түзгүлө.

6. $\bar{\Pi}$ кеңейтирилген тегиздигинде $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ проективдик репери берилген. E чекити A_1, A_2, A_3 координаталык үч бурчтугунун оордук борбору экендиги белгилүү болсо, анда координаталары боюнча $M(1, 1, -1)$ чекитин түзгүлө.

7. $\bar{\Pi}$ кеңейтирилген тегиздигинде $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, M_\infty, E\}$ проективдик репери берилген. Координаталары менен берилген $M(1, 1, 2)$ чекитин түзгүлө.

8. Төмөндөгү түгөй чекиттер аркылуу өтүүчү түз сызыктардын теңдемелерин жазгыла:

а) $B(2, -3, 0)$ жана $C(-2, 0, 1)$;

б) $M(3, -1, 0)$ жана $N(0, 5, 0)$;

в) $D(1, 2, -2)$ жана $F(-5, 3, 1)$;

г) $P(3, -2, 1)$ жана $Q(-2, 0, 1)$.

9. $\mathfrak{R}_\infty = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ реперине карата түгөй чекиттер бир тектүү эмес координаталары менен берилишкен. Алар аркылуу өтүүчү түз сызыктардын теңдемелерин жазгыла:

а) $A(0, 3)$ жана $B(2, -1)$; б) $C(0, 0)$ жана $D(-5, -2)$;

в) $M(3, -1)$ жана $N(0, 5)$; г) $P(3, -2)$ жана $D(-2, 0)$;

10. Кеңейтирилген тигиздикте $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ реперине карата координаталары менен берилген түз сызыктарды түзгүлө:

а) $U(3, 3, 0)$;

б) $U(1, -1, 2)$.

4-лекция. Кеңейтирилген түз сызыктагы жана кеңейтирилген тегиздиктеги бир тектүү жана бир тектүү эмес координаталар.

Түз сызыктын теңдемеси.

1. \bar{P} кеңейтирилген тегиздигинде \bar{d} кеңейтирилген түз сызыгын алабыз жана $\mathfrak{R}_\infty = \{A_\infty, A_2, E\}$ проективдик реперин карайбыз. \bar{d} түз сызыгында жатпаган θ чекитин алалы.

Төмөндөгүдөй үч векторду түзөбүз: $\vec{a}_1 = \vec{A_2E}$, $\vec{a}_2 = \vec{OA_2}$,

$\vec{e} = \vec{OE}$, $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{e}$ (22-сүрөт). Каалагандай $M \in \bar{d}$ чекити

\mathfrak{R}_∞ проективдик реперине карата $M(x^1, x^2)$ координаталарына

ээ болсун. \bar{d} түз сызыгында $\tilde{\mathfrak{R}} = \{A_2, \vec{A_2E}\}$ аффиндик реперин карайбыз.

Бул реперди \mathfrak{R}_∞ проективдик репери тарабынан жаратылган деп аташат. x аркылуу M чекитинин $\tilde{\mathfrak{R}}$ аффиндик репериндеги координатасын белгилейли, б.а.

$$\vec{A_2M} = x \vec{A_2E},$$

$$\vec{OM} = \vec{OA_2} + \vec{A_2M} = x \vec{A_2E} + \vec{OA_2}.$$

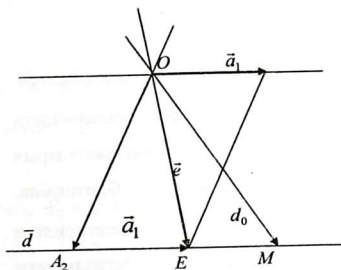
Мындан M чекити \mathfrak{R}_∞ проективдик реперине карата $(x, 1)$ координаталарына ээ боло тургандыгын көрөбүз.

Биз жогорудагы M чекитинин проективдик координаталары үчүн $M(\lambda x^1, \lambda x^2)$ белгилөөсүн киргизген элек. Ушуну эске алсак, анда $x = \lambda x^1, 1 = \lambda x^2$ келип чыгат. Мындан

$$\lambda = \frac{1}{x^2}, \quad x = \frac{x^1}{x^2}$$

экендигин көрөбүз.

Ошентип, $M \in \bar{d}$ өздүк чекитинин аффиндик координатасы анын \mathfrak{R}_∞ репериндеги проективдик координаталарынын катышына барабар болот экен. Демек, биз \bar{d} түз



22-сүрөт

$\bar{e}_2 = \vec{A_3 E_1}$ аффиндик реперин жаратат экен. M чекитинин (x^1, x^2, x^3) проективдик координаталарын анын бир тектүү координаталары деп аташат, ал эми (x, y) - M чекитинин бир тектүү эмес координаталары деп аталышат. Мындагы

$$x = \frac{x^1}{x^3}, y = \frac{x^2}{x^3}.$$

5-Мисал. Бул мисалда жогоруда каралган маселенин башкача жол менен чыгарылышын көрсөтөбүз.

Чыгаруу. $\bar{\Pi}$ кеңейтирилген тегиздигинде $\mathcal{R}_\infty = \{X_\infty, Y_\infty, A_3, E\}$ проективдик репери берилген. Бул реперге карата M чекити $(4, -1, 2)$ координаталарына ээ болсо, анда бул чекитти түзгүлө.

A_1, A_2, A_3 координаталык үч чокулугунун эки чокусу өүздүк эмес (чексиз алыстатылган) чекиттер:

$$X_\infty \in \bar{d}_2, Y_\infty \in \bar{d}_3, d_3 \cup Y_\infty = \bar{d}_3, d_2 \cup X_\infty = \bar{d}_2.$$

E чекитинин \bar{d}_2 түз сызыгындагы проекциясы болгон E_2 чекитин жана \bar{d}_3 түз сызыгындагы проекциясы болгон E_3 чекиттерин табабыз:

$$E_3 = (EX_\infty) \cap \bar{d}_3, E_2 = (EY_\infty) \cap \bar{d}_3.$$

$\mathfrak{R}_\infty = \{X_\infty, Y_\infty, A_3, E\}$ проективдик репери $\tilde{\mathfrak{R}} = \{A_3, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ аффиндик реперин жаратат,

мында

$$\bar{e}_1 = A_3 \overset{\rightarrow}{E_2}, \quad \bar{e}_2 = A_3 \overset{\rightarrow}{E_3}.$$

Берилген M чекити $\tilde{\mathfrak{R}}$ аффиндик реперине карата

$$x = \frac{x^1}{x^3}, \quad y = \frac{x^2}{x^3}$$

координаталарына ээ болот.

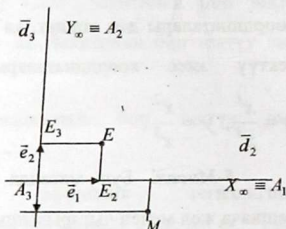
x^1, x^2, x^3 төрдүн ордуна M

чекитинин берилген координаталарын койсок, M чекитинин

аффиндик координаталары $(2, -\frac{1}{2})$ экендиги келип чыгат.

Ушундай аффиндик координаталарга ээ болгон чекитти

$\tilde{\mathfrak{R}} = \{A_3, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ реперинде түзөбүз (24-сүрөт). M - изделген чекит.



24-сүрөт

Түз сызыктын теңдемеси

Проективдик тегиздикте $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ проективдик репери берилген болсун. d түз сызыгы эки ар түрдүү $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3)$ чекиттери менен аныкталган. Ушул түз сызыктын теңдемесин табалы.

$\forall M \in d$ чекитин алалы. Эң проективдик реперине карата M чекити (x^1, x^2, x^3) координаталарына ээ болсун. A, B жана M чекиттерин жаратуучу $\vec{a}, \vec{b}, \vec{m}$ (тиешелеш түрдө) векторлорун карайбыз. Бул үч чекит коллинеардуу (б.а. бир түз сызыкта жатышат) болушкандыктан, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{m}$ векторлору сызыктуу көз каранды болушат. Ал эми A, B чекиттери ар түрдүү чекитер болушкандыктан \vec{a} жана \vec{b} векторлору коллинеардуу болушпайт, б.а. $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ - сызыктуу көз каранды эмес. Демек, \vec{m} вектору \vec{a} жана \vec{b} векторлору аркылуу сызыктуу туюнтулат: $\vec{m} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$, мында $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, $\vec{m} = \{x^1, x^2, x^3\}$. Акыркы вектордук барабардыкты координаталык көрүнүштө жазабыз:

$$\begin{aligned} x^1 &= \lambda a_1 + \mu b_1; \\ x^2 &= \lambda a_2 + \mu b_2; \\ x^3 &= \lambda a_3 + \mu b_3. \end{aligned} \quad (1)$$

(1) теңдемелер d түз сызыгынын параметрдик теңдемелери деп аталышат. Бир учурда нөлгө барабар болушпаган λ жана μ чыныгы сандары *параметрлер* деп аталышат.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{m}$ векторлору сызыктуу көз каранды болушкандыктан төмөндөгү барабардык орун алат:

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

(2) – эки чекит аркылуу өтүүчү түз сызыктын теңдемеси.

(2) барабардыктын сол жагындагы аныктагычты биринчи жолчосунун элементтери боюнча ажыраталы:

$$\begin{aligned} x^1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ b^2 & b^3 \end{vmatrix} + x^2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a^1 & a^3 \\ b^1 & b^3 \end{vmatrix} + \\ + x^3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Төмөндөгүдөй белгилөөлөрдү киргизебиз:

$$u_1 = \begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ b^2 & b^3 \end{vmatrix}; \quad u_2 = \begin{vmatrix} a^3 & a^1 \\ b^3 & b^1 \end{vmatrix}; \quad u_3 = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix}.$$

Анда акыркы теңдеме төмөндөгүдөй көрүнүшкө келет:

$$u_1 x^1 + u_2 x^2 + u_3 x^3 = 0. \quad (3)$$

$\text{rang} \begin{pmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{pmatrix} = 2$ (б.а. $\vec{a} \parallel \vec{b}$) болгондуктан, экинчи

тартиптеги минорлор бир учурда нөлгө барабар болушпайт:

$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \neq 0$. (u_1, u_2, u_3) түз сызыктын координаталары

деп аталышат. Түз сызыктын координаталары турактуу көбөйтүүчүгө чейинки тактык менен аныкталышат.

6-Мисал. Проективдик тегиздикте $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ проективдик репери берилген. E_α аркылуу E чекитинин ($A_\beta A_\gamma$)

түз сызыгындагы проекциясы (A_α борборунан проекциялоодогу) белгиленген ($\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$). Я реперине карата ($A_\alpha A_\beta$) жана ($A_\alpha E_\alpha$) координаталык түз сызыктарынын теңдемелерин тапкыла.

Чыгаруу. Я реперине карата $A_1(1, 0, 0)$, $A_2(0, 1, 0)$ болгондуктан ($A_1 A_2$) түз сызыгынын теңдемеси төмөндөгүдөй көрүнүштө болот:

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ же } x^3 = 0.$$

Ушуга эле окшош калган эки координаталык түз сызыктардын теңдемелерин табабыз:

$$(A_2 A_3): x^1 = 0; (A_3 A_1): x^2 = 0.$$

Эми ($A_1 E_1$) түз сызыгынын теңдемесин $u_1 x^1 + u_2 x^2 + u_3 x^3 = 0$ көрүнүшүндө издейли. $A_1 \in (A_1 E_1)$ болгондуктан A_1 чекитинин координаталары ушул теңдемени канааттандырат, б.а.

$$1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 = 0 \text{ же } u_1 = 0.$$

$E_1 \in (A_1 E_1)$ болгондуктан $E_1(0, 1, 1)$ чекитинин координаталары да түз сызыктын теңдемесин канааттандырышат:

$$u_1 \cdot 0 + u_2 \cdot 1 + u_3 \cdot 1 = 0 \text{ же } u_2 = -u_3.$$

Анда ($A_1 E_1$) түз сызыгынын теңдемеси төмөндөгүдөй көрүнүшкө келет:

$$u_2 x^2 - u_2 x^3 = 0, (u_2 \neq 0) \text{ же } x^2 - x^3 = 0.$$

Ушуга окшош эле $(A_2 E_2)$ жана $(A_3 E_3)$ түз сызыктарынын теңдемелерин табабыз:

$$(A_2 E_2): x^1 - x^3 = 0; \quad (A_3 E_3): x^1 - x^2 = 0.$$

7-Мисал. Проективдик тегиздиктеги $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ проективдик реперине карата A, B, C чекиттери координаталары менен берилген:

$$A(a^1, a^2, a^3), B(b^1, b^2, b^3), C(c^1, c^2, c^3).$$

A, B, C чекиттери бир түз сызыкта жатышы үчүн

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

шартынын орун алышы зарыл жана жетиштүү экендигин далилдегиле.

Чыгаруу. Зарылдык шарты. A, B, C чекиттери бир түз сызыкта жатышат деп алалы. Анда бул чекиттерди жаратуучу $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлору сызыктуу көз каранды болушат, б.а.

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Тескерисинче, (4) шарт орун алсын дейли. Анда $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ векторлору сызыктуу көз каранды болушат. Демек, $\pi(\bar{a}) = A, \pi(\bar{b}) = B, \pi(\bar{c}) = C$ чекиттери бир түз сызгыкта жатышат.

8-Мисал. $2x^1 + x^2 + x^3 = 0$ жана $3x^1 + 3x^2 + 2x^3 = 0$ теңдемелери менен берилген түз сызыктардын кесилиш чекитинин координаталарын тапкыла.

Чыгаруу. Берилген түз сызыктардын кесилиш чекитинин координаталары төмөндөгүдөй теңдемелердин системасын канааттандырат:

$$\begin{cases} 2x^1 + x^2 + x^3 = 0, \\ 3x^1 + 3x^2 + 2x^3 = 0. \end{cases}$$

Алгебра курсунан бизге белгилүү болгондой, бул системанын

жалпы чечими $x^1 = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}; x^2 = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}; x^3 = \lambda \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$

формулалары боюнча табылат. Ошондуктан

$x^1 = -\lambda, x^2 = -\lambda; x^3 = 3\lambda$ келип чыгат. Демек, берилген түз

сызыктардын кесилиш чекитинин координаталары $(-1, -1, 3)$

болот.

9-Мисал. Эгерде проективдик тегиздиктеги

$\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ реперине карата берилген

$A(a^1, a^2, a^3)$ жана $B(b^1, b^2, b^3)$ чекиттеринин биринчи түгөй координаталары пропорционалдуу болупса, анда (AB) түз сызыгынын \mathfrak{R} реперине карата жайланыш абалын аныктагыла.

Чыгаруу. Шарт боюнча $a^1 = \lambda b^1$, $a^2 = \lambda b^2$. (AB) түз сызыгынын теңдемесин жазабыз:

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ \lambda b^1 & \lambda b^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Аныктагычты биринчи жолчосунун элементтери боюнча ажыратып, төмөндөгүнү алабыз:

$$(AB): u_1 x^1 + u_2 x^2 = 0,$$

мында $u_1 = \begin{vmatrix} \lambda b^2 & a^3 \\ b^2 & b^3 \end{vmatrix}$; $u_2 = \begin{vmatrix} a^3 & \lambda b^1 \\ b^3 & b^1 \end{vmatrix}$. (AB) түз сызыгынын теңдемесин \mathfrak{R} реперинин $A_3(0, 0, 1)$ чокусунун координаталары канааттандыра тургандыгы көрүнүп турат. Демек, (AB) түз сызыгы \mathfrak{R} реперинин A_3 координаталык чекити аркылуу өтөт экен.

Өз алдынча иштөө үчүн маселелер

1. P_2 проективдик тегиздигинде $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ реперине карата $A(2, 3, 2)$, $B(4, -1, 0)$ чекиттери берилген. (AB) түз сызыгынын теңдемесин жазгыла.
2. $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ реперине карата берилген $A(1, 1, 2)$, $B(2, 3, 1)$ чекиттери аркылуу өтүүчү түз сызыктын параметрдик теңдемелери табылсын.
3. $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ реперине карата $2x^1 - 3x^2 + 5x^3 = 0$ жана $x^1 + x^2 + 3x^3 = 0$ теңдемелери менен берилген түз сызыктардын кесилиш чекитинин координаталарын тапкыла.
4. P_2 проективдик тегиздигинде $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ реперине карата (a^1, a^2, a^3) координаталары менен берилген a түз сызыгы репердин A_2 чокусу аркылуу өтүшү үчүн $a_\alpha = 0$ болушу зарыл жана жетиштүү экендигин далилдегиле.
5. Эгерде $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ реперине карата берилген $a(a^1, a^2, a^3)$ жана $b(b^1, b^2, b^3)$ түз сызыктарынын

биринчи түгөй координаталары пропорционалдуу болушса, анда ал түз сызыктардын кесилиш чекити M реперге карата кандай абалда жайланыша тургандыгын аныктагыла.

6. Эгерде кеңейтирилген тегиздиктеги $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ проективдик реперинин E бирдик чекити $A_1A_2A_3$ координаталык үч бурчтугунун медианаларынын кесилиш чекити болсо, анда бул реперге карата координаталары менен берилген $l(1,1,1)$ түз сызыгынын жайланыш абалын аныктагыла.

7. $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ реперине карата координаталары менен берилген $a(a^1, a^2, a^3)$, $b(b^1, b^2, b^3)$, $c(c^1, c^2, c^3)$ түз сызыктары жалпы чекитке ээ болушу үчүн

$$\begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{шартынын аткарылышы зарыл жана}$$

жетиштүү экендигин далилдегиле.

8. Кеңейтирилген тегиздиктеги $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ проективдик реперинин E бирдик чекити $\Delta A_1A_2A_3$ үч бурчтугунун медианаларынын кесилиши экендиги белгилүү. \mathfrak{R} реперине карата бул үч бурчтуктун жактарынын жана медианаларынын өздүк эмес чекиттеринин координаталарын тапкыла.

9. Кеңейтирилген тегиздикте берилген $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ проективдик реперине карата координаталары менен берилген $a(1, 2, -2)$ түз сызыгын түзгүлө.

10. P_2 проективдик тегиздигинде $2x^1 - 3x^2 + 5x^3 = 0$ жана $x^1 + x^2 + 3x^3 = 0$ түз сызыктары менен аныкталган түз сызыктардын боосунун $A(1, 1, 3)$ чекити аркылуу өтүүчү түз сызыгынын теңдемесин жазгыла.

11. $2x^1 + 4x^2 + x^3 = 0$ жана $x^1 + x^2 + x^3 = 0$ түз сызыктарынын кесилиш чекити жана $A(2, 1, -1)$ чекити аркылуу өтүүчү түз сызыктын теңдемесин жазгыла.

12. Кеңейтирилген тегиздикте l жана m түз сызыктары теңдемелери менен берилген: $l: 3x^1 - x^2 + 6x^3 = 0$, $m: x^2 - 4x^3 = 0$. $l \cap m = B$ жана $A(1, -2, 3)$ чекиттери аркылуу өтүүчү түз сызыктын теңдемеси жазылсын.

13. Проективдик тегиздикте төрт сызык берилген:

$$a: x^1 + x^2 - x^3 = 0; \quad c: x^1 - x^2 - x^3 = 0;$$

$$b: 2x^1 + x^2 - 2x^3 = 0; \quad d: 2x^1 - x^2 + 2x^3 = 0.$$

$A = a \cap b$ жана $B = c \cap d$ чекиттери аркылуу өтүүчү түз сызыктын теңдемесин жазгыла.

14. Кеңейтирилген тегиздикте a, b, c, d түз сызыктары

берилген:

$$a: 3x^1 + 2x^2 - x^3 = 0; \quad c: 2x^1 + x^3 = 0;$$

$$b: 4x^1 - x^2 = 0; \quad d: x^1 - x^2 + x^3 = 0.$$

$a \cap b = A$ жана $c \cap d = B$ чекиттери аркылуу өтүүчү түз сызыктын теңдемесин жазгыла.

15. Проективдик тегиздикте $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ проективдик реперине карата $A(0, 1, -1)$, $C(-4, 2, -1)$, $D(0, 1, 0)$ чекиттери жана $b: x^1 + x^2 - 3x^3 = 0$ түз сызыгы берилген. A жана $B = b \cap (CD)$ чекиттери аркылуу өтүүчү түз сызыктын теңдемесин жазгыла.

5 – лекция. Проективдик координаталарды өзгөртүү

P_2 проективдик тегиздигинде $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ проективдик репери берилген болсун. Мындан башка дагы бир $\mathfrak{R}' = \{A'_1, A'_2, A'_3, E'\}$ проективдик реперин алалы. Жаңы \mathfrak{R}' реперинин эски \mathfrak{R} реперине карата жайланыш абалы белгилүү болсун дейли, б.а. жаңы репердин A'_1, A'_2, A'_3 координаталык чекиттеринин жана E' бирдик чекитинин \mathfrak{R} реперине карата координаталары белгилүү болсун:

$$\begin{aligned} &A'_1(c_1^1, c_1^2, c_1^3), A'_2(c_2^1, c_2^2, c_2^3), \\ &A'_3(c_3^1, c_3^2, c_3^3), E'(c_0^1, c_0^2, c_0^3) \end{aligned} \quad (1)$$

A_1, A_2, A_3, E чекиттери $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ векторлору тарабынан жаратылган болсун. Анын үстүнө векторлордун $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ системасын \mathfrak{R} репери менен макулдашылган деп эсептейбиз, б.а. \bar{a}_1 вектору A_1 чекитин жаратат, $\bar{a}_2 - A_2$ чекитин, $\bar{a}_3 - A_3$ чекитин, ал эми $\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3$ вектору E чекитин жаратат:

$$\pi(\bar{a}_1) = A_1, \pi(\bar{a}_2) = A_2, \pi(\bar{a}_3) = A_3, \pi(\bar{e}) = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3.$$

$\bar{a}'_1, \bar{a}'_2, \bar{a}'_3, \bar{e}'$ аркылуу тиешелеш түрдө A'_1, A'_2, A'_3, E' чекиттерин жаратуучу векторлорду белгилейбиз. Бул векторлорду $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ векторлору аркылуу туюнталы (3 – лекцияны карагыла):

$$\begin{aligned} \bar{a}'_1 &= c_1^1 \bar{a}_1 + c_1^2 \bar{a}_2 + c_1^3 \bar{a}_3, & \bar{a}'_2 &= c_2^1 \bar{a}_1 + c_2^2 \bar{a}_2 + c_2^3 \bar{a}_3, \\ \bar{a}'_3 &= c_3^1 \bar{a}_1 + c_3^2 \bar{a}_2 + c_3^3 \bar{a}_3, & \bar{e}' &= c_0^1 \bar{a}_1 + c_0^2 \bar{a}_2 + c_0^3 \bar{a}_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Проективдик тегиздиктин каалагандай M чекитин алабыз.

\mathfrak{R} реперине карата M чекити (x^1, x^2, x^3) координаталарына ээ болсун, ал эми \mathfrak{R}' реперине карата бул чекит (y^1, y^2, y^3) координаталарына ээ болсун дейли. M чекитинин \mathfrak{R} жана \mathfrak{R}' реперлерине карата координаталарынын ортосундагы байланышты табабыз, б.а. M чекитинин эски \mathfrak{R} репериндеги координаталарын ал чекиттин жаңы \mathfrak{R}' репериндеги координаталары аркылуу туюнталы.

Төмөндөгүдөй эки учурдун болушу мүмкүн:

1. $\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3, \vec{e}'$ векторлор системасы \mathfrak{R}' репери менен макулдашылган, б.а. E' чекитин жаратуучу \vec{e}' вектору A'_1, A'_2, A'_3 чекиттерин жаратуучу векторлордун суммасына барабар:

$$\vec{e}' = \vec{a}'_1 + \vec{a}'_2 + \vec{a}'_3. \quad (3)$$

(2) жана (3) барабардыктардан төмөндөгү шарттардын аткарылышы келип чыгат:

$$\begin{aligned} c_1^1 + c_2^1 + c_3^1 &= c_0^1, \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= c_0^2, \\ c_1^3 + c_2^3 + c_3^3 &= c_0^3. \end{aligned} \quad (4)$$

M чекити \mathfrak{R} реперине карата (x^1, x^2, x^3) координаталарына ээ болгондуктан, бул чекитти жаратуучу \vec{x} вектору ($\pi(\vec{x}) = M$) дагы $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ базисине карата $\{x^1, x^2, x^3\}$ координаталарына ээ болот: $\vec{x} = \{x^1, x^2, x^3\} \Leftrightarrow \vec{x} = x^1 \vec{a}_1 + x^2 \vec{a}_2 + x^3 \vec{a}_3$. M чекити \mathfrak{R}' реперине карата (y^1, y^2, y^3) координаталарына ээ болгондуктан, ушундай эле координаталарга ($\{\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3\}$ базисине карата) ээ болгон $\vec{y} = \{y^1, y^2, y^3\}$ вектору да M чекитин жаратат. Анда проективдуу мейкиндиктин биринчи аксиомасы боюнча $\vec{y} = \lambda \vec{x}$, $\lambda \neq 0$ келип чыгат. Акыркы барабардыктагы \vec{x} жана \vec{y} векторлорун тиешелеш базистердин векторлору боюнча ажыратып жазабыз:

$$y^1 \vec{a}'_1 + y^2 \vec{a}'_2 + y^3 \vec{a}'_3 = \lambda (x^1 \vec{a}'_1 + x^2 \vec{a}'_2 + x^3 \vec{a}'_3).$$

$\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3$ векторлорунун ордуна алардын $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ базисинин векторлору боюнча ажыралыштарын ((2) формулалар) коебуз:

$$y^1(c'_1\vec{a}_1 + c'_2\vec{a}_2 + c'_3\vec{a}_3) + y^2(c''_1\vec{a}_1 + c''_2\vec{a}_2 + c''_3\vec{a}_3) + y^3(c'''_1\vec{a}_1 + c'''_2\vec{a}_2 + c'''_3\vec{a}_3) = \lambda(x^1\vec{a}_1 + x^2\vec{a}_2 + x^3\vec{a}_3) \quad (5)$$

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ векторлору сызыктуу көз каранды эмес болушкандыктан, (5) барабардыктагы алардын тиешелеш координаталарын барабарлап жазабыз:

$$\begin{aligned} \lambda x^1 &= c'_1 y^1 + c'_2 y^2 + c'_3 y^3, \\ \lambda x^2 &= c''_1 y^1 + c''_2 y^2 + c''_3 y^3, \\ \lambda x^3 &= c'''_1 y^1 + c'''_2 y^2 + c'''_3 y^3. \end{aligned} \quad (6)$$

(6) - *координаталарды өзгөртүүнүн формулалары* деп аталат.

Төмөндөгү матрица

$$C = \begin{pmatrix} c'_1 & c'_2 & c'_3 \\ c''_1 & c''_2 & c''_3 \\ c'''_1 & c'''_2 & c'''_3 \end{pmatrix}$$

жаңы \mathcal{R}' проективдик реперинен *эски* \mathcal{R} проективдик реперине *өтүүнүн матрицасы* деп аталат. A'_1, A'_2, A'_3 чекиттери коллинеардуу эмес, б.а. алар бир түз сызыкта жатышпайт. Ошондуктан C матрицасынын аныктагычы нөлдөн айырмалуу болот.

2. $\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3, \vec{e}'$ векторлорунун системасы \mathcal{R}' реperi менен макулдашылган эмес, б.а. \mathcal{R}' реперинин E бирдик чекитин

жаратуучу \bar{e} вектору A'_1, A'_2, A'_3 чекиттерин жаратуучу векторлордун суммасына барабар эмес:

$$\bar{e}' \neq \bar{a}'_1 + \bar{a}'_2 + \bar{a}'_3.$$

Биз \mathcal{R}' репери менен макулдашылган векторлордун системасын алышыбыз керек. Ал үчүн $\bar{a}'_1, \bar{a}'_2, \bar{a}'_3$ векторлорунун ордуна \mathcal{R}' репери менен макулдашылган жана A'_1, A'_2, A'_3 векторлорун жаратуучу $\bar{b}_1 = k_1 \bar{a}'_1$, $\bar{b}_2 = k_2 \bar{a}'_2$, $\bar{b}_3 = k_3 \bar{a}'_3$ векторлорун алалы. Анда төмөндөгү барабардык орун алат:

$$\bar{e}' = k_1 \bar{a}'_1 + k_2 \bar{a}'_2 + k_3 \bar{a}'_3. \quad (7)$$

(7) барабардыкты координаталык көрүнүштө жазалы:

$$\begin{cases} c_1^1 k_1 + c_2^1 k_2 + c_3^1 k_3 = c_0^1 \\ c_1^2 k_1 + c_2^2 k_2 + c_3^2 k_3 = c_0^2 \\ c_1^3 k_1 + c_2^3 k_2 + c_3^3 k_3 = c_0^3 \end{cases} \quad (8)$$

(8)ди k_1, k_2, k_3 белгисиздерине карата система катары эсептейли. Анда бул система бир тектүү эмес жана системанын аныктагычы нөлдөн айрымалуу болгондуктан, k_1, k_2, k_3 белгисиздери бир маанилүү аныкталышат (k_1, k_2, k_3 -бир учурда нөлгө барабар болушпайт).

C_1 матрицасы

$$C_1 = \begin{pmatrix} k_1 c_1^1 & k_2 c_2^1 & k_3 c_3^1 \\ k_1 c_1^2 & k_2 c_2^2 & k_3 c_3^2 \\ k_1 c_1^3 & k_2 c_2^3 & k_3 c_3^3 \end{pmatrix}$$

\mathfrak{R} реперинен \mathfrak{R}' реперине өтүүнүн матрицасы (экинчи учур үчүн) болуп эсептелет.

Эскертүү. (6) формуланы пайдаланып проективдик түз сызыктагы проективдик координаталарды өзгөртүүнүн формулаларын оңой эле жазып алууга болот:

$$\begin{cases} \lambda x' = c_1' y' + c_2' y'^2, \\ \lambda x^2 = c_1^2 y' + c_2^2 y'^2. \end{cases} \quad (9)$$

1-мисал. Проективдик тегиздикте $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ жана $\mathfrak{R}' = \{A_1', A_2', A_3', E'\}$ реперлери берилген жана \mathfrak{R} реперине карата $A_1'(1,0,-1)$ $A_2'(2,1,0)$ $A_3'(0,0,1)$ экендиги белгилүү. Эгерде:

а) $E'(3,1,0)$ (\mathfrak{R} реперине карата),

б) $E'(1,1,2)$ (\mathfrak{R} реперине карата)

болсо, анда \mathfrak{R} реперинен \mathfrak{R}' реперине өтүүдө проективдик координаталарды өзгөртүүнүн формулаларын жазгыла.

Чыгаруу.

а) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ векторлорунун системасы \mathfrak{R} репери менен макулдашылган болсун. $\{\vec{a}_1', \vec{a}_2', \vec{a}_3'\}$ - \mathfrak{R}' реперин жаратуучуу базис деп алалы. $\pi(\vec{a}_1') = A_1'$, $\pi(\vec{a}_2') = A_2'$, $\pi(\vec{a}_3') = A_3'$. Анда $\vec{a}_1'\{1,0,-1\}$, $\vec{a}_2'\{2,1,0\}$, $\vec{a}_3'\{0,0,1\}$ экендиги жогорудан белгилүү. Бул векторлордун суммасын табабыз: $\vec{a}_1' + \vec{a}_2' + \vec{a}_3' = \{3,1,0\}$. Демек, $\vec{a}_1' + \vec{a}_2' + \vec{a}_3'$ вектору E' чекитин жаратуучу вектор экен:

$$\pi(\vec{a}_1' + \vec{a}_2' + \vec{a}_3') = E'.$$

Каралып жаткан учурда, б.а. $\{\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3\}$ системасы \mathfrak{R}' репери менен макулдашылган учурда (6) формуланы колдонобуз. Бул формуладагы барабардыктардын оң жагына A'_1, A'_2, A'_3 чекиттеринин координаталарын ордуна койсок, проективдик координаталарды өзгөртүүнүн формулаларына ээ болобуз:

$$\begin{cases} \lambda x^1 = y^1 + 2y^2, \\ \lambda x^2 = y^2, \\ \lambda x^3 = -y^1 + y^3. \end{cases}$$

б) Бул учурда $\vec{a}'_1 + \vec{a}'_2 + \vec{a}'_3 = \{3, 1, 0\}$ вектору $E'(1, 1, 2)$ чекитин жаратпайт, б.а. $\{\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3\}$ векторлор системасы \mathfrak{R}' репери менен маулдашылган эмес. Демек, \mathfrak{R}' реперин жартуучу базисти табышыбыз керек.

\vec{e}' аркылуу E' чекитин жаратуучу (б.а. $\pi(\vec{e}') = E$) векторду белгилейли.

$$k_1 \vec{a}'_1 + k_2 \vec{a}'_2 + k_3 \vec{a}'_3 = \vec{e}' \quad (10)$$

шартын канааттандыра тургандай

$$\vec{b}_1 = k_1 \vec{a}'_1, \quad \vec{b}_2 = k_2 \vec{a}'_2, \quad \vec{b}_3 = k_3 \vec{a}'_3$$

векторлорун табабыз.

$\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3, \vec{e}'$ векторлорун $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ базисинин векторлору боюнча ажыраталы (мында $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ - \mathfrak{R} проективдик реперин жаратуучу базис):

$$\vec{a}'_1 = \vec{a}_1 - \vec{a}_3, \quad \vec{a}'_2 = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \quad \vec{a}'_3 = \vec{a}_3, \quad \vec{e}' = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + 2\vec{a}_3.$$

Бул барабардыктардын он жактарын (10) формуланын ордуна коюп, төмөндөгүнү алабыз:

$$\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + 2\bar{a}_3 = k_1(\bar{a}_1 - \bar{a}_3) + k_2(2\bar{a}_1 + \bar{a}_2) + k_3\bar{a}_3$$

же $(k_1 + 2k_2)\bar{a}_1 + k_2\bar{a}_2 + (k_3 - k_1)\bar{a}_3 = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + 2\bar{a}_3.$

Мындан

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 1, \\ k_2 = 1, \\ k_3 - k_1 = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} k_1 = 1, \\ k_2 = 1, \\ k_3 = 1; \end{cases}$$

келип чыгат, б.а. $\bar{b}_1 = -\bar{a}'_1$; $\bar{b}_2 = \bar{a}'_2$; $\bar{b}_3 = \bar{a}'_3$ болот экен. б) формуладагы бир реперден экинчи реперге өтүүнүн матрицасын жазып коелу:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Демек, координаталарды өзгөртүүнүн формулалары төмөндөгүдөй болот:

$$\lambda x^1 = -y^1 + y^3; \quad \lambda x^2 = y^2; \quad \lambda x^3 = y^1 + y^3.$$

Өз алдынча иштөө үчүн маселелер

1. $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ проективдик реперинен $\mathfrak{R}' = \{A'_1, A'_2, A'_3, E'\}$ проективдик реперине өткөндө координаталарды өзгөртүүнүн формулаларын жазгыла:

а) $A'_1 = A_2, \quad A'_2 = A_3, \quad A'_3 = A_1, \quad E' = E;$

$$\text{б) } A'_1 = A_2, \quad A'_2 = A_1, \quad A'_3 = A_3, \quad E' = E;$$

$$\text{в) } A'_1 = A_1, \quad A'_2 = A_2, \quad A'_3 = E, \quad E' = A_3.$$

2. Эгерде $\mathfrak{R}' = \{A'_1, A'_2, A'_3, E'\}$ реперинин E' чекити $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ реперине карата $(-1, 2, 3)$ координаталарына ээ болсо, анда \mathfrak{R} реперинен \mathfrak{R}' реперине өтүүдө координаталарды өзгөртүүнүн формулаларын жазгыла.

3. $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ реперине карата $\mathfrak{R}' = \{A'_1, A'_2, A'_3, E'\}$ реперинин чокулары жана бирдик чекити E' төмөндөгүдөй координаталарга ээ болуша:

$$A'_1(1, 1, 0) \quad A'_2(0, -1, 2) \quad A'_3(1, 1, 1) \quad E'(2, 3, -5),$$

анда координаталарды өзгөртүүнүн формуласын жазгыла.

4. Проективдик тегиздикте эки координаталар системасы берилген: $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$, $\mathfrak{R}' = \{A'_1, A'_2, A'_3, E'\}$ \mathfrak{R} реперине карата A'_1, A'_2, A'_3, E' чекиттери төмөндөгүдөй координаталарга ээ болушат:

$$A'_1(1, -1, 1), \quad A'_2(1, 0, 1), \quad A'_3(2, 1, -3), \quad E'(5, -4, 0).$$

а) Эгерде M чекити \mathfrak{R} реперине карата $(1, 1, 1)$ координаталарына ээ болсо, анда бул чекиттин \mathfrak{R}' реперине карата координаталарын тапкыла.

б) Эгерде l түз сызыгынын теңдемеси \mathfrak{R} реперине карата $x^1 + 2x^2 = 0$ көрүнүшүндө болсо, анда бул түз сызыктын \mathfrak{R}' репериндеги теңдемесин жазгыла.

в) Эгерде d түз сызыгынын теңдемеси \mathcal{R}' реперине карата $y' + 2y^2 = 0$ көрүнүшүндө болсо, анда бул түз сызыктын \mathcal{R} реперине карата теңдемесин жазгыла.

5. Кеңейтирилген тегиздиктеги $\mathcal{R}' = \{A'_1, A'_2, A'_3, E'\}$ реперинин бирдик чекити E' жана координаталык үч бурчтуктун координаталары төмөндөгүдөй аффиндик координаталарга ээ болушат: $A'_1(0,3)$, $A'_2(4,0)$, $A'_3(4,3)$, $E'(3,2)$.

а) Эгерде M чекити $(1,1)$ аффиндик координаталарына ээ болсо, анда бул чекиттин проективдик координаталарын тапкыла.

б) Эгерде P чекитинин проективдик координаталары $(4,3,-6)$ болсо, анда бул чекиттин аффиндик координаталарын тапкыла.

в) Абсциссалар огунун өздүк эмес чекитинин проективдик координаталарын тапкыла.

г) Ординаталар огунун өздүк эмес чекитинин проективдик координаталары табылсын.

д) $x - 2y + 1 = 0$ теңдемеси менен берилген түз сызыктын өздүк эмес чекитинин проективдик координаталарын тапкыла.

е) K чекитинин проективдик координаталары $(5,5,-7)$ болсо, анда бул чекиттин бир тектүү координаталары табылсын.

6. Кеңейтирилген тегиздиктеги $\mathcal{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ проективдик реперинин E бирдик чекити A_1, A_2, A_3 координаталык үч бурчтугунун медианаларынын кесилиш чекити экендиги белгилүү болсо, анда координаталык үч бурчтуктун жактарынын

жана медианаларынын өздүк эмес чекиттеринин \mathfrak{R} реперине карата координаталарын тапкыла.

7. Тик бурчтуу координаталар системасына карата ийринин теңдемеси $x^2 - 2xy + y^2 + 4x + 4y - 8 = 0$ берилген.

а) ийринин теңдемесин бир тектүү координаталар аркылуу жазгыла;

б) берилген ийри парабола экендигин далилдегиле жана анын өздүк эмес чекиттерин тапкыла;

в) параболанын огунун багыттоочу векторун тапкыла;

г) параболанын чокусунун координаталарын жана огунун теңдемесин бир тектүү эмес координаталар аркылуу жазгыла;

8. Проективдик тегиздикте $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ жана $\mathfrak{R}' = \{A'_1, A'_2, A'_3, E'\}$ реперлери берилген. \mathfrak{R} реперине карата $A'_1(0,1,-1)$, $A'_2(1,-1,2)$, $A'_3(1,1,1)$, $E'(-2,2,3)$ экендиги белгилүү.

Чекиттин координаталарын өзгөртүүнүн формулаларын жазгыла, жана

а) эгерде M чекити \mathfrak{R}' реперине карата $(0,1,1)$ координаталарына ээ болсо, анда M чекитинин \mathfrak{R} реперине карата координаталарын тапкыла;

б) эгерде N чекити \mathfrak{R} реперине карата $(1,0,0)$ координаталарына ээ болсо, анда анын \mathfrak{R}' реперине карата координаталарын тапкыла.

9. Проективдик түз сызыкта $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, E\}$ жана $\mathfrak{R}' = \{A'_1, A'_2, E'\}$ реперлери берилген. \mathfrak{R} реперине карата

$A'_1(1, -1)$, $A'_2(1, 2)$, $E'(-4, 7)$ экендиги белгилүү. Проективдик түз сызыктын чекиттеринин координаталарын өзгөртүүнүн формулаларын жазгыла, жана

а) эгерде \mathfrak{R} реперине карата P чекити $(-2, 5)$ координаталарына ээ болсо, анда бул чекиттин \mathfrak{R}' реперине карата координаталарын тапкыла.

б) эгерде \mathfrak{R}' реперине карата M чекитинин координаталары $(-2, -1)$ болсо, анда бул чекиттин \mathfrak{R} реперине карата координаталарын тапкыла.

10. Проективдик түз сызыктагы \mathfrak{R} реперинен \mathfrak{R}' реперине өтүүнүн матрицасы берилген:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проективдик түз сызыктын чекиттеринин координаталарын өзгөртүүнүн формулаларынын жазгыла, жана \mathfrak{R}' реперине карата $B(-2, 1)$ болсо, анда B чекитинин \mathfrak{R} реперине карата координаталарын тапкыла.

6-лекция. Экилениш принциптери. Дезаргдын теоремасы

Адегенде проективдик тегиздик үчүн экилениш принцибин карайлы.

Эгерде A жана A' сүйлөмдөрүнүн бири экинчисинен төмөндөгүдөй орун алмаштыруунун натыйжасында келип чыкса, анда ал сүйлөмдөр кичине экилениш принциби (тегиздиктеги

экилениш принциби) боюнча *экиленишкен сүйлөмдөр* деп аталышат.

(чекит түз сызык таандык аркылуу өтөт)
 (түз сызык чекит аркылуу өтөт таандык)

Экиленишкен сүйлөмдөрдүн бири туура болсо, анда экинчиси да туура болот.

Мисал. А сүйлөмү: “Проективдик тегиздиктин каалагандай эки чекити аркылуу жалгыз гана түз сызык өтөт”.

А’ сүйлөмү: “Проективдик тегиздиктеги каалагандай эки түз сызык бир чекитте кесилишет”.

Проективдик мейкиндик үчүн экилениш принциби (чон экилениш принциби)

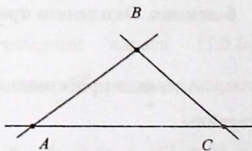
Эгерде проективдик мейкиндикте берилген А жана А’ сүйлөмдөрүнүн бири экинчисинен төмөндөгүдөй орун алмаштыруунун натыйжасында келип чыкса, анда ал сүйлөмдөр чон экилениш принциби боюнча *экиленишкен сүйлөмдөр* деп аталышат.

(чекит тегиздик түз сызык таандык аркылуу өтөт)
 (тегиздик чекит түз сызык аркылуу өтөт таандык)

Мисал. А сүйлөмү:

“Проективдик мейкиндиктеги каалагандай эки чекит аркылуу жалгыз гана түз сызык өтөт”.

А’ сүйлөмү: “Проективдик мейкиндиктеги каалагандай эки тегиздик бир түз сызык боюнча



25-сүрөт

кесилишет ”.

Дезаргдын теоремасын карайбыз жана ага экилениш принцибин колдонууну көрсөтөбүз. Проективдик тегиздикте үч A, B, C ар түрдүү чекиттерин алабыз. Бул чекиттер бир сызыкка жатышпасын дейли.

Аныктоо. Бир түз сызыкка жатышпаган үч чекит жана аларды эки-экиден туташтыруучу үч түз сызыктан турган фигура **үч чокулук** деп аталат.(25-сүрөт).

A, B, C чекиттери үч чокулуктун **чокулары**, ал эми $(AB), (BC), (AC)$ түз сызыктары үч чокулуктун **жактары** деп аталышат. Чокулары A, B, C чекиттери болгон үч чокулук $\triangle ABC$ корүнүшүндө белгиленет.

Эки $\triangle ABC$ жана $\triangle A'B'C'$ үч чокулуктары берилген болсун. A жана A', B жана B', C жана C' чокуларын тиешелеш чокулар, (AB) жана $(A'B')$, (AC) жана $(A'C')$, (BC) жана $(B'C')$ жактарын **тиешелеш жактар** деп атап коелу.

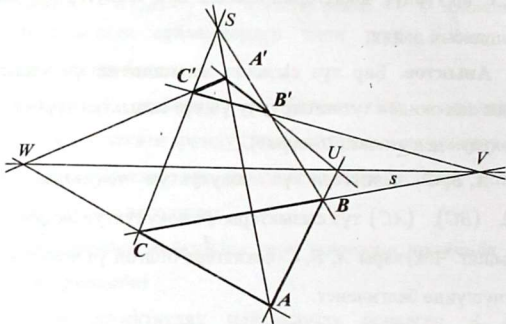
Бир үч чокулуктун бир да чокусу же бир да жагы экинчи үч чокулуктун тиешелеш чокусу же жагы менен дал келбесин деп эсептейли.

Теорема (Дезаргдын теоремасы). Эгерде берилген эки үч чокулуктун тиешелеш чокуларын туташтыруучу түз сызыктар бир чекитте кесилишсе, анда алардын тиешелеш жактарынын кесилиш чекиттери бир түз сызыкка жатышат, б.а.

$$(AA') \cap (BB') \cap (CC') = S \Rightarrow U, V, W \in S, \text{ мында}$$

$$U = (AB) \cap (A'B'), \quad V = (BC) \cap (B'C'), \quad W = (AC) \cap (A'C').$$

Дезаргдын теоремасынын далилдөөсү окурманга өз алдынча иш катары сунушталат. ([3], [6] адабияттарды карагыла).



26-сүрөт

Дезаргдын теоремасына тескери теореманы айталы.

Эки үч чокудук берилген жана алардын эч бир чокулары жана эч бир жактары дал келишпесин.

Эгерде үч чокудуктун тиешелеш жактарынын кесилиш чекиттери бир түз сызыкка жатышса, анда алардын тиешелеш чокуларын туташтыруучу сызыктар бир чекитте кесилишет, б.а. $U, V, W \in s \Rightarrow (AA') \cap (BB') \cap (CC') = S$, мында

$$(AB) \cap (A'B') = U, \quad (BC) \cap (B'C') = V, \quad (AC) \cap (A'C') = W.$$

S чекити – *Дезаргдын чекити*, s түз сызыгы – *Дезаргдын түз сызыгы*, ал эми 26-чийме – *Дезаргдын конфигурациясы* деп аталат

Евклиддик тегиздикти өздүк эмес (чексиз алыстатылган) чекиттер менен толуктап, биз кеңейтирилген тегиздикти алганбыз. Кеңейтирилген тегиздик проективдик тегиздиктин модели экендигин көрсөткөнбүз. Демек, евклиддик геометриянын маселелерин чечүүдө биз проективдик геометриянын фактыларын, атап айтканда, Дезаргдын теоремасын кеңейтирилген евклиддик тегиздикте колдоно алабыз.

1-Мисал. Өлчөмдөрү чектүү болгон чиймеде (кагазда) эки түгөй түз сызыктар берилген: p жана q түгөй түз сызыктары жетүүгө мүмкүн эмес (б.а. чиймеден сыртта) A чекитинде кесилишет, ал эми u жана g түз сызыктары жетүүгө мүмкүн эмес болгон B чекитинде кесилишет. (AB) түз сызыгынын чиймедеги бөлүгүн түзгүлө.

Чыгаруу. Эгерде эки түз сызык чийменин өлчөмүнөн сыртта кесилишсе, анда алардын кесилиш чекити жетүүгө мүмкүн болбогон чекит деп аталат.

Маселени чыгаруу (AB) түз сызыгынын жетүүгө мүмкүн болгон эки чекитин түзүүгө алынып келинет

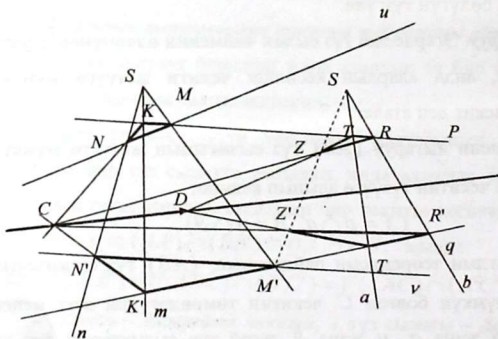
$$(A = p \cap q, B = u \cap g).$$

Дезаргдын теоремасын пайдаланып, (AB) түз сызыгынын жетүүгө мүмкүн болгон C чекитин төмөндөгүдөй жол менен түзөбүз: p жана q , u жана g түгөй түз сызыктарын эки үч чокулуктун тиешелеш жактары катары эсептейбиз. Анда C чекити эки үч чокулуктун тиешелеш жактарынын кесилиш

чекити катары табылат. Ал эми тиешелеш чокулар аркылуу өтүүчү түз сызыктар бир S чекитинде кесилишет. $M = u \cap p$ жана $M' = \vartheta \cap q$ - тиешелеш чокулар болушат.

Берилген түз сызыктардын биринде да жатпаган $S \in (MM')$ чекитин алабыз. S чекити аркылуу берилген түз сызыктарды чиймеден чыгып кетпей тургандай чекиттерде кесип өтүүчү m жана n түз сызыктарын жүргүзөбүз: $N = n \cap u$, $N' = n \cap \vartheta$, $K = m \cap p$, $K' = m \cap q$.

$\triangle MNK$ жана $\triangle M'N'K'$ эки чокулугун карайбыз (MM') , (NN') , (KK') түз сызыктары бир эле S чекити аркылуу өтүшөт. Демек, Дезаргдын теоремасы боюнча бул эки чокулуктун тиешелеш жактарынын кесилиш чекиттери бир түз сызыкта жатышат:



27-сүрөт

$(MN) \cap (M'N') = A, (KM) \cap (K'M') = B, (NK) \cap (N'K') = C$
 A, B, C чекиттери бир түз сызыкка жатышкандыктан
 $C \in (AB)$ жана C - жетүүгө мүмкүн болгон чекит.

(AB) түз сызыгынын дагы бир жетүүгө мүмкүн болгон D чекитин түзүү үчүн Дезаргдын конфигурациясын пайдаланабыз:
 p жана q түгөй түз сызыктары бир жуп тиешелеш жактар болсун, ал эми экинчи жуп тиешелеш жактар C чекитинде, үчүнчү жуп тиешелеш жактар жетүүгө мүмкүн болгон D чекитинде кесилишет деп эсептейли. Тиешелеш чокулар аркылуу өтүүчү түз сызыктар p жана q түз сызыктарында жатпаган, каалагандай S' чекитинде кесилишет деп алабыз.

S' чекити аркылуу каалагандай a жана b түз сызыктарын жүргүзөбүз:

$$b \cap p = R, b \cap q = R', a \cap p = T, a \cap q = T'.$$

(RC) жана $(R'C')$ түз сызыктарын түзөбүз. (RC) түз сызыгында жаткан Z чекитин алабыз. Анда $Z' = (S'Z) \cap (R'C)$ болот.

$\Delta TRZ, \Delta TR'Z'$ эки үч чокулугун карайлы.
 $(TT') \cap (RR') \cap (ZZ') = S'$ болгондуктан, $A = p \cap q, C,$
 $D = (ZT) \cap (Z'T')$ чекиттери бир түз сызыкка жатышат. Демек,
 $A, B, C, D \in (AB), C$ жана D - (AB) түз сызыгынын жетүүгө мүмкүн болгон (чиймеден чыкпаган) бөлүгү болуп эсептелинет.

2-Мисал. Евклиддик тегиздикте $MKLN$ параллелограммы,
 n түз сызыгы жана бул түз сызыкка да, параллелограммдын

жактарында да жатпаган A чекити берилген. Сызгычты гана пайдаланып, A чекити аркылуу өтүп, берилген n түз сызыгына параллель болгон түз сызыкты жүргүзүлө.

Чыгаруу. Адегенде n түз сызыгына параллель болгон каалагандай түз сызыкты жүргүзүп алалы. Ал үчүн ΔXYN жана $\Delta X'Y'L$ үч чокулуктарын $X = n \cap (NK)$, $Y = n \cap (NM)$ боло тургандай түзүп алалы.

(XX') , (YY') , (NL) түз сызыктары бир чекитте кесилишет. Демек, ΔXYN жана $\Delta X'Y'L$ үч чокулуктары Дезаргдын теоремасын канааттандырышат жана (XN) жана $(X'L)$, (YN) жана $(Y'L)$, (XY) жана $(X'Y')$ түз сызыктарынын кесилиш чекиттери бир түз сызыкка жатышат. Бирок, үч чокулуктардын (XN) жана $(X'L)$, (YN) жана $(Y'L)$ жактары параллель болушат. Демек, $(XY) \parallel (X'Y')$, б.а. $n \parallel (X'Y')$. l аркылуу n түз сызыгына параллель болгон түз сызыкты белгилейли. Эми биз эки параллель түз сызыктарга (n жана l) жана A чекитине ээ болдук. Берилген n түз сызыгына параллель жана A чекити аркылуу өтүүчү түз сызыкты жүргүзүү үчүн дагы бир B чекитин табышыбыз керек. Ал үчүн Дезаргдын конфигурациясын төмөндөгүдөй түзүп алабыз: n жана l түз сызыктары бир жуп тиешелеш жактар болушсун, экинчи жуп тиешелеш жактар A чекитинде кесилишсин, ал эми үчүнчү жуп тиешелеш жактардын кесилиши биз издеп жаткан B чекити болот.

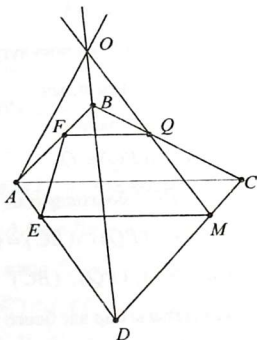
$S' \notin n, S' \notin l$ болгондой S' чекитин тандап алабыз жана каалагандай a жана b түз сызыктарын жүргүзөбүз:
 $n \cap a = R, l \cap a = R', n \cap b = Q, l \cap b = Q'$.

[RA] кесиндисинде жаткан каалагандай P чекитин алабыз жана $P' = (S'P) \cap (AR')$ чекитин табабыз.

ΔRQP жана $\Delta R'Q'P'$ үч чокулуктары Дезаргдын теоремасын канааттандырышат, б.а. (RQ) жана $(R'Q')$, (RP) жана $(R'P')$, (QR) жана $(Q'R')$ түз сызыктарынын кесилиш чекиттери бир түз сызыкта жатышат ($A, B, D_\infty = n \cap l$ үч чекити бир түз сызыкта жатышат). Демек, $D_\infty \in (AB)$, б.а. $(AB) \parallel n$.

3-Мисал. Евклиддик тегиздикте трапеция төрт бурчтукка ичтен сызылган жана трапециянын параллель жактары төрт бурчтуктун диагоналарынын бирине параллель болушат. Трапециянын параллель эмес жактары төрт бурчтуктун экинчи диагоналында кесилише турган-дыгын далилдегиле.

Чыгаруу. $EFQM$ трапециясы $ABCD$ төрт бурчтугуна ичтен сызылган жана $(FQ) \parallel (EM)$, $(FQ) \parallel (AC)$. Демек, ΔAFE жана



28-сүрөт

$\triangle CQM$ үч чокулуктары Дезаргдын теоремасын канааттандырышат. Ошондуктан $B = (AE) \cap (CD)$,
 $D = (AE) \cap (CM)$ жана $O = (EF) \cap (QM)$ (трапециянын параллель эмес жактарынын кесилиш чекити) чекиттери бир түз сызыкта жатышат, б.а. O чекити (BD) түз сызыгында жатат экен.

4-Мисал. $\triangle ABC$ жана $\triangle DBC$ үч бурчтуктары берилген жана аларды p, q, r параллель түз сызыктары кесип өтүшөт (29-сүрөт):

$$r = (AD), \quad p \cap (AB) = M, \quad p \cap (DB) = P,$$

$$q \cap (AC) = N, \quad q \cap (DC) = Q.$$

$(MN), (PQ)$ жана (BC) түз сызыктары бир эле боого таандык экендигин далилдегиле.

Чыгаруу. $\triangle MAN$

жана $\triangle PQD$ эки чокулугун карайбыз. Дезаргдын

теоремасы боюнча

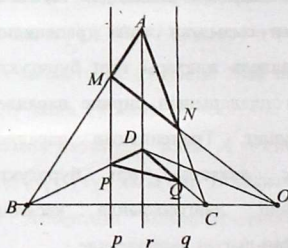
$$(MN) \cap (PQ) = O,$$

$O \in (BC)$ болгондуктан,

$$(MN) \cap (PQ) \cap (BC) = O,$$

б.а. $(MN), (PQ), (BC)$ үч

түз сызыгы бир эле боого таандык болушат.



29-сүрөт

Өз алдынча иштөө үчүн маселелер

1. Чектелген өлчөмдөгү чиймеде A чекити жана жетүүгө мүмкүн болбогон B чекитинде кесилишүүчү p жана q түз сызыктары берилген. (AB) түз сызыгынын чиймедеги бөлүгүн түзгүлө.
2. Сызгычтын гана жардамы менен берилген A чекити аркылуу өтүп, берилген p жана q параллель түз сызыктарына параллель болгон түз сызыкты жүргүзгүлө.
3. Евклиддик тегиздикте $ABCD$ параллелограммы, анын жактарынын бирине таандык болгон M чекити жана n түз сызыгы берилген. Сызгычтын гана жардамы менен M чекити аркылуу өтүүчү жана берилген n түз сызыгына параллель болгон түз сызыкты жүргүзгүлө.
4. n түз сызыгы жана анда жатпаган M жана N чекиттери берилген. (MN) түз сызыгын жүргүзбөй туруп, сызгычтын гана жардамы менен $D = n \cap (MN)$ чекитин түзгүлө.
5. Төмөндөгүлөрдү далилдегиле:
а) эгерде ΔABC жана $\Delta A'B'C'$ үч бурчтуктарынын чокуларын туташтыруучу (AA') , (BB') , (CC') түз сызыктары параллель болушса жана $U = (AB) \cap (A'B')$, $V = (BC) \cap (B'C')$, $W = (AC) \cap (A'C')$ чекиттери жашаса, анда бул чекиттер U, V, W бир түз сызыкта жатышат;

- б) эгерде $(AB) \parallel (A'B')$, $(BC) \cap (B'C') = M$,
 $(AC) \cap (A'C') = N$ болсо, анда $(MN) \parallel (AB)$ болот;
- в) эгерде $(AB) \parallel (A'B')$, $(BC) \parallel (B'C')$ болсо анда
 $(AC) \parallel (A'C')$ болот.
6. Эгерде $ABCD$ трапециясы (AB) негизине параллель болушкан p жана q түз сызыктары менен кесилишсе:
 $p \cap (AD) = M$, $q \cap (AC) = P$, $q \cap (BD) = N$,
 $q \cap (BC) = Q$, анда $E = (MN) \cap (PQ)$ чекити (AB) түз сызыгында жата тургандыгын далилдегиле.
7. Дезаргдын теоремасын пайдаланып, үч бурчтуктун медианалары бир чекитте кесилише тургандыгын далилдегиле.
8. Эгерде евклиддик тегиздикте $ABCD$ параллелограммынын чокулары $A'B'C'D'$ параллелограммынын жактарында жатышса: $A \in (A'B')$, $B \in (B'C')$, $C \in (C'D')$,
 $D \in (D'A')$ анда $ABCD$ параллелограммынын симметрия борбору $A'B'C'D'$ параллелограммынын симметрия борбору менен дал келе тургандыгын далилдегиле.
9. Проективдик тегиздикте төмөндөгүдөй фигуралар берилген:
- эки ар түрдүү түз сызык;
 - бир түз сызыкка таандык болгон үч чекит;
 - түз сызыктардын боосу;
 - үч чокулук;
 - толук төрт чокулук.

Кичине экилениш принцибин колдонуп, берилген фигураларга экиленишкен фигураларды тапкыла.

10. Проективдик мейкиндикте төмөндөгүдөй фигуралар берилген:

- а) эки ар түрдүү түз сызык;
- б) бир түз сызыкка таандык үч ар түрдүү чекиттер;
- в) түз сызыктардын боосу;
- г) үч чокулук;
- д) толук төрт чокулук.

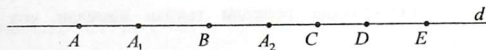
Чоң экилениш принцибин колдонуп, берилген фигураларга экиленишкен фигураларды тапкыла.

7-лекция. Түз сызыктын төрт чекитинин татаал катышы

P_2 проективдик тегиздигинде d түз сызыгын карайбыз.

$\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, E\}$ – d түз сызыгындагы проективдик репер болсун жана $A, B, C, D \in d$ чекиттери \mathfrak{R} реперине карата төмөндөгүдөй координаталарга ээ болушсун:

$$A(a^1, a^2), B(b^1, b^2), C(c^1, c^2), D(d^1, d^2).$$



30-сүрөт

Аныктоо. d түз сызыгынын төрт A, B, C, D чекитинин татаал катышы деп төмөндөгүдөй аныкталган санды айтабыз:

$$(AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ c^1 & c^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b^1 & b^2 \\ d^1 & d^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b^1 & b^2 \\ c^1 & c^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ d^1 & d^2 \end{vmatrix}}. \quad (1)$$

Бул формуланы кыскача

$$(AB, CD) = \frac{(AC)(BD)}{(AD)(BC)}$$

көрүнүшүндө жазууга болот, мында (XY) аркылуу X жана Y чекиттеринин координаталарынан түзүлгөн аныктагыч белгиленген. Эгерде d түз сызыгында $\mathfrak{R} = \{A, B, C\}$ проективдик реперин ала турган болсок, анда $(AB), (CD)$ татаал

катышы төмөндөгүдөй туюнтулат: $(AB, CD) = \frac{d^1}{d^2}$, мында

$D(d^1, d^2), (d^1, d^2)$ - D чекитинин \mathfrak{R} реперине карата координаталары.

Түз сызыктагы төрт чекиттин татаал катышынын касиеттери

1⁰. Түз сызыктын төрт чекиттеринин татаал катышы бул түз сызыкта проективдик реперди тандап алуудан көз каранды болбойт.

2⁰. $(AB, CD) = (CD, AB)$.

3⁰. $(AB, CD) = (BA, CD)^{-1}$.

$$4^0. (AB, CD) = (BA, DC).$$

Эгерде шарттуу түрдө A жана B чекиттерин "базистик чекиттер», C жана D чекиттерин "бөлүүчү чекиттер" деп атап койсок, анда $2^0, 3^0, 4^0$ касиеттерди төмөндөгүдөй айтууга болот:

2^0 . Бөлүүчү чекиттер менен базистик чекиттердин орундарын алмаштыруудан түз сызыктын төрт чекитинин татаал катышы өзгөрбөйт.

3^0 . Базистик чекиттердин гана орундарын алмаштыруудан түз сызыктын төрт чекитинин татаал катышы тескерисине өзгөрөт. (ушуга эле окшош, эгерде бөлүүчү чекиттердин гана ордун алмаштырсак, анда түз сызыктын төрт чекитинин татаал катышы тескерисине өзгөрөт).

4^0 . Эгерде бир эле учурда базистик чекиттердин да, бөлүүчү чекиттердин да орундарын алмаштырсак, анда түз сызыктын төрт чекитинин татаал катышы өзгөрбөйт.

Натыйжалар

1. A, B, C - түз сызыктын ар түрдүү чекиттери болсун. (1) формуладан $D \neq A$ экендиги келип чыгат.
2. Эгерде $(AB, CD) = (AB, CN)$ болсо, анда $D = N$.
3. Эгерде $(AB, CD) = 0$ болсо, анда $B = D$.
4. $(AB, CD) = 1 \Leftrightarrow D = C$.

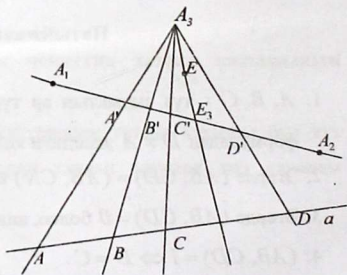
Эгерде $(AB, CD) < 0$ болсо, анда A, B түгөй чекиттери C, D түгөй чекиттерин ажыратат деп айтышат же тескерисинче C, D түгөй чекиттери A, B түгөй чекиттерин ажыратат деп айтышат.

Эгерде $(AB, CD) > 0$ болсо, анда A, B түгөй чекиттери (C, D түгөй чекиттери) C, D түгөй чекиттерин (A, B түгөй чекиттерин) ажыратышпайт деп айтышат. Мындан ары $AB \div CD$ же $AB \simeq CD$ белгилөөлөрүн пайдаланабыз.

Эгерде бир түз сызыкка жатышкан A, B, C, D төрт чекитинин татаал катышы $(AB, CD) = -1$ болсо, анда бул төрт чекит гармоникалык төрт чекит деп аталышат.

Эскертүү. Проективдик тегиздикте a түз сызыгы жана $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ проективдик репер берилген. Бул реперге карата A, B, C, D чекиттери координаталары менен берилишкен: $A(a^1, a^2, a^3), B(b^1, b^2, b^3), C(c^1, c^2, c^3), D(d^1, d^2, d^3)$.

A_1, A_2, A_3 координаталык үч чокудуктун A_3 чокусунан (A_1A_2) түз сызыгына A, B, C, D чекиттерин проекциялайбыз. Анда $(AB, CD) = (A'B', C'D')$



31-сүрөт

орун алат. (A_1A_2) түз сызыгында $\mathfrak{R}^* = \{A_1, A_2, E_3\}$ реперин алалы. Бул реперге карата A', B', C', D' чекиттери тиешелеш түрдө $(a^1, a^2), (b^1, b^2), (c^1, c^2), (d^1, d^2)$ координаталарына ээ болушат.

(A_1A_2) түз сызыгындагы A', B', C', D' төрт чекитинин татаал катышын (1) формула боюнча табабыз. Перспективдүү чагылтууда (a түз сызыгын (A_1A_2) түз сызыгына) татаал катыш сакталгандыктан, $(AB, CD) = (A'B', C'D')$ орун алат. Демек,

$$(A'B', C'D') = \frac{\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ c^1 & c^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b^1 & b^2 \\ d^1 & d^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b^1 & b^2 \\ c^1 & c^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ d^1 & d^2 \end{vmatrix}}.$$

Боонун төрт сызыгынын татаал катышы

Проективдик тегиздикте O борборлуу түз сызыктардын боосу $\pi(O)$ берилген. $a, b, c, d \in \pi(O)$ төрт түз сызыгын алалы. Бул түз сызыктарды $O \notin l$ түз сызыгы кесип өтсүн: $A = a \cap l, B = b \cap l, C = c \cap l, D = d \cap l$.

Аныктоо. Боонун төрт түз сызыгынын татаал катышы деп l түз сызыгынын A, B, C, D төрт чекитинин татаал катышын айтабыз.

Түз сызыктардын боосун каалагандай m түз сызыгы менен кесели:

$$A' = a \cap m, B' = b \cap m,$$

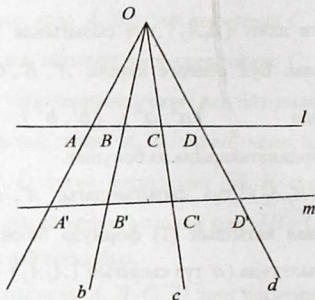
$$C' = c \cap m, D' = d \cap m.$$

$$(AB, CD) = (A'B', C'D')$$

экендиги жогорудан белгилүү, демек,

$$(ab, cd) = (A'B', C'D'),$$

б.а. боонун төрт сызыгынын татаал катышы ал түз сызыктарды кесип өтүүчү түз сызыкты тандап алуудан көз каранды болбойт.



32-сүрөт

1-Мисал. Түз сызыктын иреттелген төрт чекити берилсе, анда алардын эки ортоңку чекиттеринин же эки четки чекиттеринин орундарын алмаштыруудан татаал катыш бирдей өзгөрө тургандыгын далилдегиле.

Чыгаруу. A, B, C, D - түз сызыктын иреттелген төрт чекити, $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, E_3\}$ - ушул түз сызыктагы проективдик репер болсун. Бул реперге карата A, B, C, D чекиттери төмөндөгүдөй координаталарга ээ болушсун: $A(a^1, a^2), B(b^1, b^2), C(c^1, c^2), D(d^1, d^2)$. Төмөндөгү татаал катыштарды табалы: $(AB, CD), (AC, BD), (DB, CA)$.

$$(AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ c^1 & c^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b^1 & b^2 \\ d^1 & d^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ d^1 & d^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b^1 & b^2 \\ c^1 & c^2 \end{vmatrix}} = t,$$

$$(AC, BD) = \frac{\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c^1 & c^2 \\ d^1 & d^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ d^1 & d^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c^1 & c^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix}} = q,$$

$$(DB, CA) = \frac{\begin{vmatrix} d^1 & d^2 \\ c^1 & c^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b^1 & b^2 \\ a^1 & a^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d^1 & d^2 \\ a^1 & a^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b^1 & b^2 \\ c^1 & c^2 \end{vmatrix}} = \frac{(-1) \begin{vmatrix} c^1 & c^2 \\ d^1 & d^2 \end{vmatrix} \cdot (-1) \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix}}{(-1) \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ d^1 & d^2 \end{vmatrix} \cdot (-1) \begin{vmatrix} c^1 & c^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix}} = q$$

Демек, $(AC, BD) = (DB, CA)$.

2-Мисал. Проективдик түз сызыктын ар түрдүү беш чекити A, B, M, U, V үчүн $(AB, MV) = (AB, MU)(AB, UV)$ барабардыгынын орун ала тургандыгын далилдегиле.

Чыгаруу. Проективдик түз сызыкта $\mathfrak{R} = \{A, B, M\}$ реперин алалы: $A(1, 0), B(0, 1), M(1, 1)$. \mathfrak{R} реперине карата $U(u^1, u^2), V(v^1, v^2)$ болсун.

$(AB, MV), (AB, MU), (AB, UV)$ татаал катыштарын табабыз:

$$(AB, MV) = \frac{v^l}{v^2}, \quad (AB, MU) = \frac{u^l}{u^2},$$

$$(AB, UV) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & | & 0 & 1 \\ u^l & u^2 & | & v^l & v^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & | & 0 & 1 \\ v^l & v^2 & | & u^l & u^2 \end{vmatrix}} = \frac{u^2(-v^l)}{v^2(-u^l)} = \frac{v^l u^2}{v^2 u^l},$$

$$(AB, MV)(AB, UV) = \frac{u^l}{u^2} \cdot \frac{v^l u^2}{v^2 u^l} = \frac{v^l}{v^2} = (AB, MV).$$

3-Мисал. Кеңейтирилген түз сызыкта үч A, B, C ар түрдүү чекиттер берилген. Ушул түз сызыкта $(AB, CD) = 2$ шарты орун ала тургандай D чекитин түзгүлө.

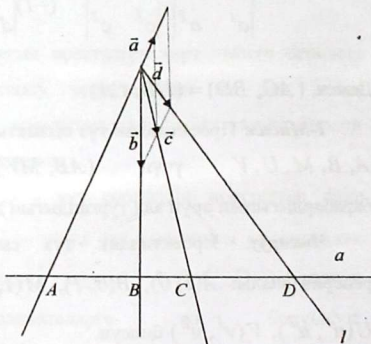
Чыгаруу.

Кеңейтирилген түз сызыкта $\mathfrak{R} = \{A, B, C\}$ реперин алабыз. D чекити \mathfrak{R} реперине карата (d^1, d^2) координаталарына ээ болсун. Анда

$$(AB, CD) = \frac{d^1}{d^2} = 2$$

орун алат. Мындан

$d^1 = 2d^2$ келип чыгат. \mathfrak{R} реперине карата D чекити $(2, 1)$

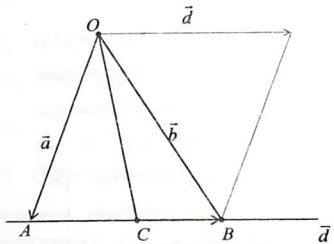


33-сүрөт

координаталарына ээ болот. Кеңейтирилген түз сызыкка $D(2, l)$ чекитин түзөбүз. (AB) түз сызыгын жаратуучу эки ченемдүү вектордук мейкиндикти башталыштары O чекити менен дал келишкен жана (AB) түз сызыгында жатышпаган багытталган кесиндилердин көптүгү түзөт: $\pi(V_2) = (AB)$. $\mathfrak{R} = \{A, B, C\}$ реперин жаратуучу $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ вектордук базисин табабыз: $\pi(\vec{a}) = A$, $\pi(\vec{b}) = B$, $\pi(\vec{a} + \vec{b}) = C$. $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ вектору C чекитин жаратат. $\vec{d} = 2\vec{a} + \vec{b}$ векторун түзөбүз, $\pi(d) = D$. $l = (O, \vec{d})$ түз сызыгы \vec{a} түз сызыгын D чекитинде кесип өтөт.

4-Мисал. (AB) кеңейтирилген түз сызыгында $[AB]$ кесиндисинин орто чекити C , (AB) түз сызыгынын өздүк эмес D_∞ чекити жана A, B чекиттери гармоникалык төрт чекит боло тургандыгын далилдегиле б.а. $(AB, CD_\infty) = -1$ экендигин далилдегиле.

Чыгаруу. (AB) түз сызыгында $\mathfrak{R} = \{A, B, C\}$ реперин карайбыз (AB) түз сызыгын жаратуучу вектордук мейкиндик үчүн башталыштары O чекити болгон, (AB) түз сызыгында жатышпаган



34-сүрөт

багытталган кесиндилердин көптүгүн алууга болот:
 $\pi(V_2) = (AB)$.

$\mathfrak{R} = \{A, B, C\}$ реперин аныктоочу $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ вектордук базисин табалы. $\pi(\vec{a}) = A$, $\pi(\vec{b}) = B$, $\pi(\vec{a} + \vec{b}) = C$. $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$.

$\mathfrak{R} = \{A, B, C\}$ реperi $\{\vec{OA}, \vec{OB}\}$ базиси тарабынан жаратылат.

$\pi(\vec{d}) = D_\infty$, $\vec{d} = \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$.

Демек, D_∞ чекити \mathfrak{R} реперине карата $(-1, 1)$ координаталарына ээ болот жана $(AB, CD_\infty) = -1$ орун алат.

5-Мисал. a жана b түз сызыктары O чекитинде кесилишет,

c жана d түз сызыктары a

жана b түз сызыктары түзгөн

бурчтардын биссектрисалары

болушат. $(ab, cd) = -1$

экендиги далилденсин.

Чыгаруу. c жана d түз

сызыктары вертикалдык

бурчтардын биссектрисалары

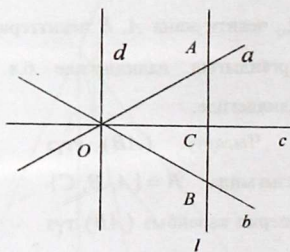
болушкандыктан, алар өз ара

перпендикуляр болушат (35-

сүрөт). d түз сызыгына параллель болгон l түз сызыгын

жүргүзөбүз. Демек, l түз сызыгы c түз сызыгына перпендикуляр

болот. $A = l \cap a$, $B = l \cap b$, $C = l \cap c$, $D_\infty = l \cap d$.



35-сүрөт

$l \perp c$ жана c - бурчтун биссектрисасы болгондуктан, C чекити $[AB]$ кесиндисинин орто чекити болот. Демек, $(AB, CD_\infty) = -1$ жана $(ab, cd) = -1$.

Өз алдынча иштөө үчүн маселелер

1. Түз сызыктын иреттелген төрт чекитинин биринчи жана үчүнчү элементтеринин орундарын же экинчи жана төртүнчү элементтеринин орундарын алмаштыруудан бул төрт чекиттин татаал катышы бирдей өзгөрө тургандыгын далилдегиле.
2. Түз сызыктын төрт A, B, C, D чекитинин татаал катышы t га барабар экендиги белгилүү. Бул чекиттерден түзүүгө мүмкүн болгон бардык төрт чекиттердин татаал катыштарын тапкыла.
3. Түз сызыкта A, B, C, D төрт чекити берилген. D чекити A, B, C үч чекитине төртүнчү гармоникалык чекит болушу үчүн $\mathfrak{R} = \{A, B, C\}$ реперине карата D чекитинин $\{u^1, u^2\}$ координаталары $u^1 = -u^2$ шартын канааттандырышы зарыл жана жетиштүү экендигин далилдегиле.
4. $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ проективдик реперинин $A_1A_2A_3$, координаталык үч бурчтугунун жактарын $a(1, 1, 1)$ түз

сызыгы M_γ чекиттеринде кесип өтө тургандыгы белгилүү болсо, анда $(A_\alpha A_\beta, E_\gamma M_\gamma) = -1$ экендигин далилдегиле $(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3)$.

5. $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ реперине карата $A(1, 2, 4)$, $B(5, 0, 4)$, $C(3, 1, 4)$, $(2, -1, 0)$ чекиттери берилген. Бул чекиттер бир түз сызыкка жатыша тургандыгын далилдегиле жана (AB, CD) , (DB, CA) татаал катыштарын тапкыла.
6. (AB) кеңейтирилген түз сызыгында $\mathfrak{R} = \{A, B, D_\infty\}$ проективдик репери берилген. Бул реперге карата $[AB]$ кесиндисинин орто чекитинин координаталарын тапкыла.
7. $\triangle ABC$ үч бурчтугу берилген. (CM) түз сызыгы бул үч бурчтуктун медианасын кармап турат жана (CX) түз сызыгы үч бурчтуктун $[AB]$ жагына параллель экендиги белгилүү. (CM) , (CX) жана (CA) , (CB) түз сызыктары боонун гармоникалык төрт сызыгы боло тургандыгын далилдегиле.
8. $\triangle ABC$ үч бурчтугу берилген. $\angle ACB$ бурчунун ички жана тышкы биссектрисалары (AB) түз сызыгын D жана E чекиттеринде кесип өтө тургандыгы белгилүү. Анда $(AB, DE) = -1$ экендиги далилденсин.
9. Проективдик тегиздикте эки параллель түз сызык жана алардын бирөөндө $[AB]$ кесиндиси берилген. Сызгычты

гана пайдаланып, $[AB]$ кесиндисинин орто чекитин түзгүлө.

10. Параллелограммдын диагоналдары кесилишкен чекиттеринде тең экиге бөлүнүшө тургандыгын далилдегиле.

8-лекция. Тегиздикти жана түз сызыкты проективдик өзгөртүү. Инварианттык чекит жана инварианттык түз сызык

1. P_2 проективдик тегиздигинде эки $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ жана $\mathfrak{R}' = \{A'_1, A'_2, A'_3, E'\}$ проективдик реперлери берилген.

Аныктоо. P_2 тегиздигинин ар бир $M(x^1, x^2, x^3)_{\mathfrak{R}}$ чекитине ушул эле тегиздиктин \mathfrak{R}' реперине карата (x^1, x^2, x^3) же $(\lambda x^1, \lambda x^2, \lambda x^3)$ ($\lambda \neq 0$) координаталарына ээ боло тургандай M' чекитин тиешелеш кое тургандай $f: P_2 \rightarrow P_2$ өзгөртүп түзүүсү P_2 тегиздигин *проективдик өзгөртүү* деп аталат, б.а. $\forall M \in P_2, M(x^1, x^2, x^3)_{\mathfrak{R}}$ болсо, анда $f(M) = M' \in P_2$ жана $M'(x^1, x^2, x^3)_{\mathfrak{R}'}$ болот.

Тегиздикти проективдик өзгөртүү төмөндөгүдөй касиеттерге ээ.

I^0 . Проективдик тегиздикти каалагандай проективдик өзгөртүүдө түз сызык түз сызыкка өтөт.

Бул касиеттен тегиздикти проективдик өзгөртүү чекиттердин коллинеардуулугун сактай тургандыгы келип чыгат (б.а. бир түз сызыкта жатышкан чекиттер бир түз сызыкта жатышкан чекиттерге өтөт). Ошондуктан, тегиздикти проективдик өзгөртүүнү *коллинеация* деп да аташат.

2^o. Проективдик тегиздикте каалагандай эки $\{A, B, C, D\}$ жана $\{A', B', C', D'\}$ иреттелген жана жалпы абалдагы чекиттердин төрттүгү берилген болсо, анда $\{A, B, C, D\}$ төрттүгүн $\{A', B', C', D'\}$ төрттүгүнө өткөрө тургандай жалгыз гана проективдик өзгөртүү жашайт.

3^o. Тегиздикти каалагандай проективдик өзгөртүүдө түз сызыктын төрт чекитинин гатаал катышы сакталат.

Тегиздикти проективдик өзгөртүүнүн аналитикалык туюнтулушу

$f: P_2 \rightarrow P_2$ проективдик өзгөртүүсү түгөй $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$, $\mathfrak{R}' = \{A'_1, A'_2, A'_3, E'\}$ реперлери менен аныкталган болсун. Каалагандай $M \in P$ чекитин алалы. Проективдик өзгөртүүнүн аныктоосу боюнча, эгерде $M(x^1, x^2, x^3)_{\mathfrak{R}}$ болсо, анда $M' = f(M)$, $M'(\lambda x^1, \lambda x^2, \lambda x^3)_{\mathfrak{R}'}$ болот.

$\lambda = 1$ деп алалы, анда $M'(x^1, x^2, x^3)_{\mathfrak{R}'}$. Бул чекиттин \mathfrak{R} реперине карата координаталарын (y^1, y^2, y^3) аркылуу белгилейли. M' чекитинин \mathfrak{R} жана \mathfrak{R}' реперлерине карата координаталарынын ортосундагы байланышты табалы. Ал үчүн \mathfrak{R} реперинен \mathfrak{R}' реперине өтүүнүн (5-лекция, (6) формулалар) формулаларынан пайдаланабыз, жана $y^1, y^2, y^3 - M'$ чекитинин эски координаталары, ал эми $x^1, x^2, x^3 -$ анын жаңы координаталары деп эсептейбиз. Анда

$$\begin{aligned} \lambda y^1 &= c_1^1 x^1 + c_2^1 x^2 + c_3^1 x^3, \\ \lambda y^2 &= c_1^2 x^1 + c_2^2 x^2 + c_3^2 x^3, \\ \lambda y^3 &= c_1^3 x^1 + c_2^3 x^2 + c_3^3 x^3 \end{aligned} \quad (1)$$

келип чыгат. (1) – тегиздикти проективдик өзгөртүүнүн формулалары.

Проективдик өзгөртүүнүн формулаларындагы коэффициенттерден түзүлгөн матрицаны C аркылуу белгилейли:

$$C = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \\ c_1^3 & c_2^3 & c_3^3 \end{pmatrix}.$$

Бул матрицанын аныктагычы нөлдөн айырмалуу, себеби, A'_1, A'_2, A'_3 чекиттери бир түз сызыкта жатышпайт.

Кеңейтирилген аффиндик (евклиддик) тегиздикте M жана M' чекиттеринин бир тектүү эмес координаталарын карайлы:

$$M(x, y), M'(x', y'), x = \frac{x^1}{x^3}, y = \frac{x^2}{x^3}, x' = \frac{y^1}{y^3}, y' = \frac{y^2}{y^3}.$$

Анда тегиздикти проективдик өзгөртүүнүн формулалары төмөндөгүдөй көрүнүштө болот:

$$x' = \frac{c_1^1 x + c_2^1 y + c_3^1}{c_1^3 x + c_2^3 y + c_3^3}; \quad y' = \frac{c_1^2 x + c_2^2 y + c_3^2}{c_1^3 x + c_2^3 y + c_3^3}. \quad (2)$$

(2) формулаларды келтирип чыгарууну окурманга өз алдынча иш катары сунуштайбыз.

2. $\varphi: a \rightarrow a'$ - a түз сызыгын a' түз сызыгына чагылтуусун карайлы. $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, E\}$ - a түз сызыгындагы, ал эми $\mathfrak{R}' = \{A'_1, A'_2, E'\}$ - a' түз сызыгындагы проективдик реперлер болушсун.

Аныктоо. \mathfrak{R} реперине карата (x^1, x^2) координаталарына ээ болгон $M \in a$ чекитине \mathfrak{R}' реперине карата $(\lambda x^1, \lambda x^2)$ координаталарына ээ болгон $M' = \varphi(M)$, $M' \in a'$ чекитин тиешелеш кое турган $\varphi: a \rightarrow a'$ чагылтуусу **проективдик чагылтуу** деп аталат.

Эгерде $a \equiv a'$ болсо, анда $\varphi: a \rightarrow a$ проективдик чагылтуусу a түз сызыгын проективдик өзгөртүү деп аталат.

Тегиздикти проективдик өзгөртүүнүн формулаларын тапканга окшош эле түз сызыкты проективдик өзгөртүүнүн формулаларын табууга болот:

$$\lambda y^1 = c_1^1 x^1 + c_2^1 x^2, \quad \lambda y^2 = c_1^2 x^1 + c_2^2 x^2, \quad (3)$$

мында $(y^1, y^2) - M' \in a$ чекитинин \mathfrak{R} реперине карата координаталары, $(x^1, x^2) -$ бул чекиттин \mathfrak{R}' реперине карата координаталары.

(3) барабардыктардын оң жагындагы коэффициенттерден түзүлгөн матрицанын аныктагычы нөлдөн айырмалуу болот.

Кеңейтирилген аффиндик (же евклиддик) тегиздикте M жана M' чекиттеринин бир тектүү эмес координаталарын карайлы:

$$x = \frac{x^1}{x^2}, \quad x' = \frac{y^1}{y^2}.$$

Анда түз сызыкты проективдик өзгөртүүнүн формуласы

$$x' = \frac{c_1^1 x + c_2^1}{c_1^2 x + c_2^2} \quad (4)$$

көрүнүшүндө болот.

Аныктоо. Эгерде түз сызыкты проективдик өзгөртүү өзүнө тескери өзгөртүү менен дал келсе, анда аны *инволюция* деп аташат.

Инволюция төмөндөгүдөй касиеттерге ээ болот [3]:

l^0 . Эгерде l түз сызыкты проективдик өзгөртүү кандайдыр бир $A \in l$ чекитин $B \in l$ чекитине өткөрсө, ал эми $B \in l$ чекитин

$A \in I$ чекитине өткөрсө, анда ал проективдик өзгөртүү инволюция болот.

2⁰. Инволюция эки инварианттык чекитке ээ болот же бир дагы инварианттык чекитке ээ болбойт.

Эгерде инволюция эки инварианттык чекитке ээ болсо, анда ал *гиперболикалык инволюция* деп аталат.

Эгерде инволюция инварианттык чекитке ээ болбосо, анда ал *эллиптикалык инволюция* деп аталат.

3⁰. Эгерде A жана B - гиперболикалык инволюциянын инварианттык чекиттери болушса, анда алар (AB) түз сызыгынын бул инволюциядагы каалаган эки тиешелеш чекити менен гармоникалык төрт чекитти түзүшөт.

Инварианттык точкалар жана инварианттык түз сызыктар

Проективдик тегиздикте $f: P_2 \rightarrow P_2$ өзгөртүүсү (1) формулалар менен аныкталган болсун:

$$\begin{cases} \lambda y^1 = c_1^1 x^1 + c_2^1 x^2 + c_3^1 x^3, \\ \lambda y^2 = c_1^2 x^1 + c_2^2 x^2 + c_3^2 x^3, \\ \lambda y^3 = c_1^3 x^1 + c_2^3 x^2 + c_3^3 x^3, \end{cases} \quad (1)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \\ c_1^3 & c_2^3 & c_3^3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

1. Эгерде $M \in P_2$ чекитинин $f: P_2 \rightarrow P_2$ проективдик өзгөртүүсүндөгү элеси өзү менен дал келсе ($M' = f(M)$, $M' \cong M$), анда бул чекит f проективдик өзгөртүүсүнүн инварианттык чекити деп аталат.

M чекити $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ проективдик реперине карата (x^1, x^2, x^3) координаталарына ээ болсун. Эгерде M -инварианттык чекит болсо, анда $M' = M$ жана $M'(\lambda x^1, \lambda x^2, \lambda x^3)$ болот.

(1) формулалардагы $\lambda y^1, \lambda y^2, \lambda y^3$ төрдү $\lambda x^1, \lambda x^2, \lambda x^3$ төр менен алмаштырабыз:

$$\lambda x^1 = c_1^1 x^1 + c_2^1 x^2 + c_3^1 x^3,$$

$$\lambda x^2 = c_1^2 x^1 + c_2^2 x^2 + c_3^2 x^3,$$

$$\lambda x^3 = c_1^3 x^1 + c_2^3 x^2 + c_3^3 x^3.$$

Мындан төмөндөгүнү алабыз:

$$(c_1^1 - \lambda)x^1 + c_2^1 x^2 + c_3^1 x^3 = 0,$$

$$c_1^2 x^1 + (c_2^2 - \lambda)x^2 + c_3^2 x^3 = 0, \quad (2)$$

$$c_1^3 x^1 + c_2^3 x^2 + (c_3^3 - \lambda)x^3 = 0.$$

(2) система – бир тектүү болгондуктан, ал нөл эмес чечимдерге ээ болушу үчүн аныктагычы нөлгө барабар болуш керек:

$$\begin{vmatrix} c_1^1 - \lambda & c_2^1 & c_3^1 \\ c_1^2 & c_2^2 - \lambda & c_3^2 \\ c_1^3 & c_2^3 & c_3^3 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

(3) теңдеме инварианттык чекитти табуу үчүн *мунөздүк теңдеме* деп аталат. Бул теңдеме жок дегенде бир чыныгы чечимге ээ болот. Табылган чечимди (2) системага коюп, пайда болгон системаны чыгарабыз. Табылган чечим (x_0^1, x_0^2, x_0^3) - инварианттык чекиттин координаталары болот.

Ошентип, тегиздикти проективдик өзгөртүү жок дегенде бир инварианттык чекитке ээ болот экен.

2. P_2 проективдик тегиздигинде d түз сызыгы берилген болсун.

Аныктоо. Эгерде $f: P_2 \rightarrow P_2$ проективдик өзгөртүүсүндө d түз сызыгынын элеси өзү менен дал келсе (б.а. $f(d) \equiv d'$ болсо), анда бул түз сызык f *проективдик өзгөртүүсүнүн инварианттык түз сызыгы* деп аталат.

Эгерде d - инварианттык түз сызык болсо, анда бул түз сызыктын каалаган $M \in d$ чекитинин f өзгөртүүсүндөгү элеси $M' = f(M)$ бул түз сызыктын өзүнө таандык болот.

d түз сызыгы

$$u_1 x^1 + u_2 x^2 + u_3 x^3 = 0 \quad (4)$$

теңдемеси менен берилген болсун. $M \in d$ чекитинин координаталарын (x^1, x^2, x^3) аркылуу белгилеп коелу. f проективдик өзгөртүүсүндө $M \in d$ чекити $M'(y^1, y^2, y^3) \in d$ чекитине өтөт. Анда (y^1, y^2, y^3) координаталары (4) теңдемени канааттандырышат:

$$u_1 y^1 + u_2 y^2 + u_3 y^3 = 0. \quad (5)$$

(5) теңдемедеги y^1, y^2, y^3 төрдүн ордуна алардын (1) формуладагы туюнтулуштарын ($\lambda = 1$ деп алып) коебуз:

$$u_1(c_1^1 x^1 + c_2^1 x^2 + c_3^1 x^3) + u_2(c_1^2 x^1 + c_2^2 x^2 + c_3^2 x^3) + u_3(c_1^3 x^1 + c_2^3 x^2 + c_3^3 x^3) = 0. \quad (6)$$

(6) - d түз сызыгынын теңдемеси жана ал инвариант - түз сызык болгондуктан, (6) теңдеме (4) теңдеме менен дал келишет. Анда x^1, x^2, x^3 төрдүн алдындагы коэффициенттер пропорционалдуу болушат:

$$\begin{aligned} \lambda u_1 &= c_1^1 u_1 + c_2^1 u_2 + c_3^1 u_3, \\ \lambda u_2 &= c_2^1 u_1 + c_2^2 u_2 + c_2^3 u_3, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\lambda u_3 = c_3^1 u_1 + c_3^2 u_2 + c_3^3 u_3;$$

$$\begin{aligned} (c_1^1 - \lambda)u_1 + c_2^1 u_2 + c_3^1 u_3 &= 0, \\ c_2^1 u_1 + (c_2^2 - \lambda)u_2 + c_2^3 u_3 &= 0, \\ c_3^1 u_1 + c_3^2 u_2 + (c_3^3 - \lambda)u_3 &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

u_1, u_2, u_3 төр бир учурда нөлгө барабар болушпагандыктан, (8) системадан төмөндөгүнү алабыз:

$$\begin{vmatrix} c_1^1 - \lambda & c_2^1 & c_3^1 \\ c_2^1 & c_2^2 - \lambda & c_2^3 \\ c_3^1 & c_3^2 & c_3^3 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (9)$$

(3) жана (9) теңдемелер дал келишет, б.а. мүнөздүк теңдемелер бирдей болушат.

Демек, каалагандай проективдик өзгөртүү жок дегенде бир инварианттык түз сызыкка ээ болот экен. (2) жана (8) системалардын чечимдери бул системалардын матрицаларынын рангдарынан көз каранды болот.

1-Мисал. $f: P_2 \rightarrow P_2$ проективдик өзгөртүүсү төмөндөгүдөй формула менен берилген:

$$\begin{cases} \lambda y^1 = x^1 + 2x^2, \\ \lambda y^2 = x^2 + 2x^3, \\ \lambda y^3 = x^2. \end{cases} \quad (*)$$

- а) $A(1, 1, -2)$ чекитинин элесинин координаталары табылсын;
б) $B'(-2, -2, 1)$ чекитинин алгачкы элесинин координаталарын тапкыла;
в) $l: 2x^1 + x^3 = 0$ түз сызыгынын элесинин теңдемесин жазгыла;
г) $m': 2y^1 + y^2 + y^3 = 0$ түз сызыгынын алгачкы элесинин теңдемесин жазгыла.

Чыгаруу. а) f проективдик өзгөртүүсүнүн берилген формулаларындагы x^1, x^2, x^3 төрдүн ордуна A чекитинин координаталарын коебуз:

$$\lambda y^1 = 1 + 2,$$

$$\lambda y^2 = 1 + 2(-2),$$

$$\lambda y^3 = 1,$$

$$\text{же } A' = f(A), A'(3, -3, 1).$$

б) Изделүүчү $B(x^1, x^2, x^3)$ чекитинин элесинин координаталары белгилүү: $y^1 = -2, y^2 = -2, y^3 = 1$. Буларды f проективдик өзгөртүүсүнүн формулаларына ордуна коебуз:

$$\begin{cases} \lambda(-2) = x^1 + 2x^2, \\ \lambda(-2) = x^2 + 2x^3, \\ \lambda \cdot 1 = x^3. \end{cases}$$

Бул системаны чыгарабыз да $B(8, -2, 3)$ экендигин табабыз: $\lambda = -2$ деп алалы. Анда $x^2 = -2$, экинчи теңдемеден $4 = -2 + 2x^3$ же $x^3 = 3$ келип чыгат. Биринчи теңдемеден $x^1 = 8$ экендигин көрөбүз.

в) 1-жол. l түз сызыгында жатышкан каалагандай C, M чекиттерин алабыз жана бул чекиттердин C', M' элестерин табабыз. Андан кийин (CM) түз сызыгынын элеси болгон $(C'M')$ түз сызыгынын теңдемесин жазабыз.

2-жол. f проективдик өзгөртүүсүнүн формулаларынан x^1, x^2, x^3 төрдү туюнтуп алабыз.

$$\begin{cases} \mu x^1 = y^1 - 2y^3, \\ \mu x^2 = y^3, \\ \mu x^3 = \frac{1}{2}(y^2 - y^3). \end{cases} \quad (**)$$

(*) системасындагы y^1, y^2, y^3 төрдү бош мүчөлөр катары эсептеп ($\lambda = 1$ үчүн), Крамердин формулалары боюнча (**) барабардыктарына ээ болобуз).

Табылган x^1, x^2, x^3 төрдү l түз сызыгынын теңдемесине ордуна койсок l' түз сызыгынын теңдемеси келип чыгат:

$$l': 4y^1 + y^2 - 9y^3 = 0.$$

г) m түз сызыгынын теңдемесин жазуу үчүн m' түз сызыгынын теңдемесиндеги y^1, y^2, y^3 төрдүн ордуна (*) формуласындагы туюнтулуштарын коебуз:

$$\frac{2}{\lambda}(x^1 + 3x^2) + \frac{1}{\lambda}(x^2 + 2x^3) + \frac{1}{\lambda}x^2 = 0$$

же

$$x^1 + 3x^2 + x^3 = 0.$$

2-Мисал. Чекиттердин төмөндөгүдөй түгөй төрттүгү менен берилген проективдик өзгөртүүнүн формулаларын жазгыла: $A(0, 0, 1)$, $A'(0, 0, 1)$; $B(2, 0, 1)$, $B'(2, 0, 1)$; $C(1, 1, 1)$, $C'(1, 1, 0)$; $D(1, -1, 1)$, $D'(1, -1, 0)$.

Чыгаруу. f проективдик өзгөртүүсүнүн (1) формулаларына

$$\begin{cases} \lambda y^1 = c_1^1 x^1 + c_2^1 x^2 + c_3^1 x^3, \\ \lambda y^2 = c_1^2 x^1 + c_2^2 x^2 + c_3^2 x^3, \\ \lambda y^3 = c_1^3 x^1 + c_2^3 x^2 + c_3^3 x^3, \end{cases} \quad (1)$$

берилген чекиттердин координаталарын ордуна коебуз да, төмөндөгүдөй он эки теңдемеден турган системаны алабыз:

$$\begin{cases} 0 = c_3^1, \\ 0 = c_3^2, \\ \lambda_1 = c_3^3, \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_3 = c_1^1 + c_2^1 + c_3^1, \\ \lambda_3 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2, \\ 0 = c_1^3 + c_2^3 + c_3^3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\lambda_2 = 2c_1^1 + c_3^1, \\ 0 = 2c_1^2 + c_3^2, \\ \lambda_2 = 2c_1^3 + c_3^3, \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_4 = c_1^1 - c_2^1 + c_3^1, \\ -\lambda_4 = c_1^2 - c_2^2 + c_3^2, \\ 0 = c_1^3 - c_2^3 + c_3^3. \end{cases}$$

Ар бир бөлүкчө системадан λ_i лерди чыгарып таштайбыз:

$$0 = c_3^1,$$

$$0 = c_3^2,$$

$$0 = 2c_1^1 + c_3^1 - 4c_1^3 - 2c_3^3,$$

$$0 = 2c_1^2 + c_3^2,$$

$$0 = c_1^1 + c_2^1 + c_3^1 - c_1^2 - c_2^2 - c_3^2,$$

$$0 = c_1^3 + c_2^3 + c_3^3,$$

$$0 = c_1^1 - c_2^1 + c_3^1 + c_1^2 - c_2^2 + c_3^2,$$

$$0 = c_1^3 - c_2^3 + c_3^3.$$

Демек, $c_3^1 = c_3^2 = c_3^3 = 0$. Беш даана теңдемелердин системасына ээ болобуз.

$$\begin{cases} 2c_1^1 - 4c_1^3 - 2c_3^3 = 0, \\ c_1^1 + c_2^1 - c_2^2 = 0, \\ c_1^3 + c_2^3 + c_3^3 = 0, \\ c_1^1 - c_2^1 - c_2^2 = 0, \\ c_1^3 - c_2^3 + c_3^3 = 0. \end{cases}$$

Экинчи жана төртүнчү теңдемелерден $c_2^1 = 0$, $c_1^1 = c_2^2$ экендиги келип чыгат. Үчүнчү жана бешинчи теңдемелерден $c_2^3 = 0$, $c_1^3 + c_3^3 = 0$, ал эми биринчи теңдемеден $c_1^1 = 2c_1^3 + c_3^3 = c_1^3 + (c_1^3 + c_3^3)$, б.а. $c_1^1 = c_1^3$ келип чыгат. $c_1^1 = 1$ деп алалы. Проективдик өзгөртүүнүн формулаларындагы коэффициенттерди турактуу көбөйтүүчүгө чейинки тактык менен табабыз. Анда $c_1^1 = c_2^2 = c_1^3 = -c_3^3 = 1$ экендигин көрөбүз. Ошентип, проективдик өзгөртүүнүн формулалары төмөндөгүдөй болот экен:

$$\begin{cases} \lambda y^1 = x^1, \\ \lambda y^2 = x^2, \\ \lambda y^3 = x^1 - x^3. \end{cases}$$

3-Мисал. Түз сызыкты проективдик өзгөртүүнүн формулалары берилген. Анын инварианттык чекиттеринин координаталарын тапкыла:

$$\begin{cases} \lambda y^1 = x^1 + 2x^2, \\ \lambda y^2 = 4x^1 - x^2. \end{cases}$$

Чыгаруу. $M(x^1, x^2)$ - проективдик өзгөртүүнүн инварианттык чекити болсун дейли. Анда $f(M) = M'$, $M' \equiv M$ болот. Бул чекиттин координаталары төмөндөгүдөй теңдемелердин системасынан табылат:

$$\begin{cases} \lambda x^1 = x^1 + 2x^2, \\ \lambda x^2 = 4x^1 - x^2. \end{cases}$$

Мындан

$$\begin{cases} (1 - \lambda)x^1 - 2x^2 = 0, \\ 4x^1 + (1 - \lambda)x^2 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

системасына ээ болобуз. Алгебра курсунан мындай системанын рангы белгисиздердин санынан кичине болсо гана нөл эмес чечимге ээ боло тургандыгын билебиз. Ошондуктан (10) системанын аныктагычы нөлгө барабар болот:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 4 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Акыркы барабардык $-\lambda$ га карата квадраттык теңдеме болот:

$$\lambda^2 - 9 = 0.$$

Мындан $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -3$ чечимдерине ээ болобуз. Бул маанилерди (10) системага ордуна коёбуз:

$$\begin{cases} 2x^1 + 2x^2 = 0, \\ 4x^1 - 2x^2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^1 - 2x^2 = 0, \\ 4x^1 + 4x^2 = 0. \end{cases}$$

Бул системалардын чечимдери проективдик өзгөртүүнүн кыймылсыз (инварианттык) чекиттеринин координаталары болушат: $M_1(1, 1)$, $M_2(1, -2)$.

4-Мисал. Тегиздикти проективдик өзгөртүүнүн формулалары берилген:

$$\begin{cases} \lambda y^1 = x^1, \\ \lambda y^2 = x^2, \\ \lambda y^3 = x^1 - x^3. \end{cases}$$

Бул проективдик өзгөртүүнүн кыймылсыз чекиттеринин координаталарын тапкыла.

Чыгаруу. $M(x^1, x^2, x^3)$ - проективдик өзгөртүүнүн кыймылсыз чекити болсун дейли. Анда x^1, x^2, x^3 төрдү y^1, y^2, y^3 төрдүн ордуна койсок, туура барабардыктарга ээ болобуз:

$$\begin{cases} \lambda x^1 = x^1, \\ \lambda x^2 = x^2, \\ \lambda x^3 = x^1 - x^3 \end{cases}$$

же

$$\begin{cases} (1-\lambda)x^1 = 0, \\ (1-\lambda)x^2 = 0, \\ x^1 - (1+\lambda)x^3 = 0. \end{cases}$$

Акыркы система бир тектүү болгондуктан, анын нөл эмес чечиминин жашашы үчүн, системанын аныктагычы нөлгө барабар болушу зарыл жана жетиштүү:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -(1+\lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

Мындан $(1-\lambda)^2(1+\lambda) = 0$ келип чыгат. Демек $\lambda_1 = -1$ жана $\lambda_2 = 1$ болгондо акыркы система нөл эмес чечимдерге ээ болот.

1) $\lambda_1 = -1$ деп алалы. Бул учурда системадан $x^1 = x^2 = 0$, x^3 - эркин белгисиз экендигин көрөбүз. Ошондуктан $A(0, 0, 1)$ кыймылсыз чекит экен.

2) $\lambda_2 = 1$ деп алалы. Система бир эле $x^3 = x^1 - x^3$ теңдемесине келип калат. Бул учурда $x^1 - 2x^3 = 0$ теңдемеси түз сызыкты аныктайт жана бул түз сызыктын чекиттери кыймылсыз болушат.

Ошентип, f проективдик өзгөртүүсүнүн кыймылсыз чекиттери d түз сызыгынын чекиттери болушат.

5-Мисал. Тегиздикти проективдик өзгөртүүнүн формулалары берилген:

$$\begin{cases} \lambda y^1 = x^1, \\ \lambda y^2 = x^2, \\ \lambda y^3 = x^1 - x^3. \end{cases}$$

Ушул проективдик өзгөртүүнүн инварианттык түз сызыктарын тапкыла.

Чыгаруу. d - тегиздикти проективдик өзгөртүүнүн инварианттык түз сызыгы болсун жана анын теңдемесин

$$u_1 x^1 + u_2 x^2 + u_3 x^3 = 0 \quad (11)$$

көрүнүшүндө издейбиз.

Эгерде $M(x^1, x^2, x^3) \in d$ болсо, анда $f(M) = M'$, $M' \in d$ болот жана $M'(y^1, y^2, y^3)$ чекитинин координаталары дагы (11) теңдемени канааттандырышат:

$$u_1 y^1 + u_2 y^2 + u_3 y^3 = 0.$$

M жана M' чекиттеринин координаталарын проективдик өзгөртүүнүн формулалары байланыштырыш турат. $\lambda = 1$ болгон учурда акыркы барабардыкка проективдик өзгөртүүнүн формулаларын ордуна койсок,

$$x^1(u_1 + u_3) + x^2 u_2 - x^3 u_3 = 0 \quad (12)$$

теңдемеси келип чыгат. d түз сызыгы инварианттык түз сызык болгондуктан (11) жана (12) теңдемелер бир эле түз сызыкты аныкташат, б.а. өзгөрүлмөлөрдүн алдындагы коэффициенттер пропорционалдуу болушат:

$$\begin{cases} \lambda u_1 = u_1 + u_3, \\ \lambda u_2 = u_2, \\ \lambda u_3 = -u_3. \end{cases}$$

Бул системаны 4-мисалдагы системага окшош изилдесек, анда ал $\lambda_1 = 1$ жана $\lambda_2 = -1$ болгондо нөл эмес чечимдерге ээ болот. $\lambda = 1$ болгондо системаны чыгаруу менен $u_3 = 0$, u_1 жана u_2 - эркин белгисиздер экендигин көрөбүз. Демек, теңдемелери $\alpha x^1 + \beta x^2 = 0$ (α, β - каалагандай параметрлер) көрүнүшүндө болгон бардык түз сызыктар кыймылсыз болушат. Мындай түз сызыктардын баардыгы борбору $A(0, 0, 1)$ чекити болгон түз сызыктардын боосун түзүшөт (ушуну окурман өз алдынча далилдесин).

$\lambda = -1$ үчүн системаны чыгарсак, анда $2u_1 + u_3 = 0$ жана $u_2 = 0$ барабардыктарына ээ болобуз. Демек, $(1, 0, -2)$ - изделүүчү түз сызыктын координаталары. Ошондуктан d инварианттык түз сызыгынын теңдемеси $x^1 - 2x^3 = 0$ көрүнүшүндө болот. Ошентип, f проективдик өзгөртүүсүнүн инварианттык түз сызыктарынын көптүгү d түз сызыгынан жана A борборлуу түз сызыктардын боосунан турат экен.

Өз алдынча иштөө үчүн маселелер

1. f проективдик өзгөртүүсү төмөндөгүдөй формулалар менен берилген:

$$\begin{cases} \lambda x'_1 = x_1 + x_2, \\ \lambda x'_2 = x_1 = x_2, \\ \lambda x'_3 = 2x_2 + x_3. \end{cases}$$

а) $A(2, -1, 0)$, $B(1, 1, -2)$, $C(0, 0, 1)$ чекиттеринин элестеринин координаталары табылсын;

б) $D'(5, -1, 1)$, $E'(0, 1, -1)$, $F'(1, -2, 3)$ чекиттеринин алгачкы элестеринин координаталары табылсын;

в) $a: x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$, $b: 2x_2 + x_3 = 0$, $c: x_1 = 0$ түз сызыктарынын элестеринин теңдемелерин жазгыла;

г) $l^I: x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$; $m^I: x_2 + x_3 = 0$ түз сызыктарынын алгачкы элестеринин теңдемелерин жазгыла.

2. Тиешелеш чекиттердин үч жубу берилген: A жана $f(A) = B$; B жана $f(B) = C$; C жана $f(C) = A$. Эгерде $A(2, 1)$, $B(-2, 3)$, $C(1, -1)$ болсо, анда түз сызыкты проективдик өзгөртүүнүн формулаларын жазгыла.

3. Төмөндөгү чекиттер берилген: $A(1, 3, 0)$ жана $A'(3, 0, 1)$; $B(2, -1, 2)$ жана $B'(-1, 2, 2)$; $C(1, 1, 1)$ жана $C'(1, 1, -1)$;

$D(1, 0, 0)$ жана $D'(0, 0, 1)$. Тегиздикти проективдик өзгөртүүнүн формулаларын жазгыла.

4. Түз сызыкты проективдик өзгөртүү төмөндөгүдөй формулалар менен берилген:

$$\begin{cases} \lambda y^1 = x^1 + x^2, \\ \lambda y^2 = x^1 - x^2. \end{cases}$$

Бул проективдик өзгөртүүнүн кыймылсыз чекиттерин тапкыла.

5. Төмөндөгүдөй формулалары менен берилген түз сызыкты проективдик өзгөртүү инварианттык чекитке ээ эмес экендигин далилдегиле:

$$\begin{cases} \lambda y^1 = x^1 + x^3, \\ \lambda y^2 = 2x^1 - x^2. \end{cases}$$

6. Төмөндөгү проективдик өзгөртүүлөрдүн кыймылсыз чекиттерин тапкыла:

$$\text{а) } \begin{cases} \lambda y^1 = 4x^1 - x^2, \\ \lambda y^2 = 6x^1 - 3x^2, \\ \lambda y^3 = x^1 - x^2 - x^3. \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \lambda y^1 = 2x^1 + x^3, \\ \lambda y^2 = x^1 + x^2 + x^3, \\ \lambda y^3 = -x^1. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \lambda y^1 = 3x^1 + x^2, \\ \lambda y^2 = x^1 + 3x^2, \\ \lambda y^3 = 4x^3. \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} \lambda y^1 = x^1 + x^3, \\ \lambda y^2 = 2x^1, \\ \lambda y^3 = -2x^2 + x^3. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \lambda y' = x', \\ \lambda y^2 = -x^2, \\ \lambda y^3 = x' - x^3. \end{cases}$$

$$\text{е) } \begin{cases} \lambda y' = x^2 - x^3, \\ \lambda y^2 = 2x' - x^2, \\ \lambda y^3 = -x^3. \end{cases}$$

7. 3-маселедеги проективдик өзгөртүүнүн кыймылсыз түз сызыктарын тапкыла.

8. Төмөндөгү формула менен берилген проективдик өзгөртүү эки гана кыймылсыз чекитке ээ боло тургандыгын далилдегиле:

$$\begin{cases} \lambda y' = x' + x^3, \\ \lambda y^2 = 2x^2, \\ \lambda y^3 = x^3. \end{cases}$$

9. Төмөндөгүдөй формулалары менен берилген түз сызыкты проективдик өзгөртүүнүн инварианттык чекиттерин тапкыла:

$$\text{а) } \begin{cases} \lambda y' = x' - x^3, \\ \lambda y^2 = 2x' - x^2. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \lambda y' = -2x' + x^2, \\ \lambda y^2 = -x' + 2x^2. \end{cases}$$

10. Тегиздикти проективдик өзгөртүүнүн формулалары берилген:

$$\begin{cases} \lambda y' = x' + x^2, \\ \lambda y^2 = x' + x^3, \\ \lambda y^3 = x^2 + x^3. \end{cases}$$

Тапкыла:

а) $A(1, -1, 1)$ чекитинин элесин;

б) $C'(2, -1, 0)$ чекитинин алгачкы элесин;

в) $p: x' - x^2 + 2x^3 = 0$ түз сызыгынын элесин;

г) $q: x^1 - 2x^2 + 3x^3 = 0$ түз сызыгынын алгачкы элесин.

9-лекция. Гомологиянын аныктоосу. Кеңейтирилген тегиздиктеги гомологиянын түрлөрү

Проективдик өзгөртүүнүн инварианттык чекиттерин аныктоочу системанын (8-лекциядагы «Инварианттык чекиттер жана инварианттык түз сызыктар» деген теманын (2) системасы) матрицасын жазып алалы.

$$A = \begin{pmatrix} c_1^1 - \lambda & c_2^1 & c_3^1 \\ c_1^2 & c_2^2 - \lambda & c_3^2 \\ c_1^3 & c_2^3 & c_3^3 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Бул матрицанын рангы 2 ге же 1 ге барабар болот, себеби $\det A = 0$.

Эгерде $\text{rang } A = 1$ болсо, анда (2) системада бир гана сызыктуу көз каранды эмес теңдеме болот, мисал үчүн биринчи теңдеме сызыктуу көз каранды эмес деп эсептейли. Анда (2) система чексиз көп чечимдерге ээ болот, ал эми проективдик өзгөртүү чексиз көп инварианттык чекиттерге ээ болот да, ал чекиттер

$$(c_1^1 - \lambda)x^1 + c_2^1x^2 + c_3^1x^3 = 0 \quad (1)$$

теңдемеси менен аныкталган түз сызыкта жатышат, б.а. проективдик өзгөртүү инварианттык чекиттердин түз сызыгына ээ болот.

Бул учурда проективдик өзгөртүүнүн инварианттык түз сызыгын аныктоочу (8) система дагы чексиз көп чечимдерге ээ болот. (8) системанын үч теңдемесинин ичинен бирөө гана сызыктуу көз каранды эмес болот. Мисал үчүн, биринчи теңдемесин сызыктуу көз каранды эмес теңдеме деп алалы:

$$(c_1^1 - \lambda)u_1 + c_2^1 u_2 + c_3^1 u_3 = 0.$$

Бул теңдеме бир эле $(c_1^1 - \lambda, c_2^1, c_3^1)$ чекити аркылуу өтүүчү инварианттык түз сызыктардын координаталарын аныктайт.

Аныктоо. Инварианттык чекиттердин түз сызыгына (демек, инварианттык түз сызыктардын боосуна дагы) ээ болгон проективдик өзгөртүү *гомология* деп аталат.

Инварианттык түз сызыктардын боосунун борбору гомологиянын борбору деп аталат. Инварианттык чекиттердин s түз сызыгы *гомологиянын огу* деп аталат.

Гомологиянын эки түрү болот. Эгерде гомологиянын борбору анын огуна жатпаса, анда ал гомологияны *гиперболикалык гомология* деп аташат.

Эгерде гомологиянын борбору анын огуна жатса, анда ал гомология *параболикалык гомология* деп аталат.

Гомологиянын касиеттери.

$h: P_2 \rightarrow P_2$ гомологиясы берилген болсун. Гомологияны O борбору, s огу, тиешелеш M жана $M' = h(M)$ чекиттеринин

жардамы менен аныктоого болот.

(OM) түз сызыгын жүргүзөбүз. Бул түз сызык инварианттык түз сызык болот, себеби ал гомологиянын борбору аркылуу өтүп жатат. Демек, M' чекити (OM) түз сызыгына таандык болот.

Демек, төмөнкүдөй касиет далилденди:

1^0 . M, O, M' чекиттери бир түз сызыкка жатышат. Проективдик тегиздиктин N чекитин алалы.

(MN) түз сызыгын карайбыз.
 $(MN) \cap s = T$ чекитин

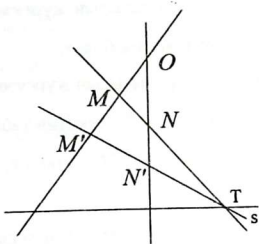
белгилейли. Бул чекит - инварианттык чекит, себеби ал

s гомология оғунда жатат. Демек, ($M'N'$) түз сызыгы T чекити аркылуу өтөт.

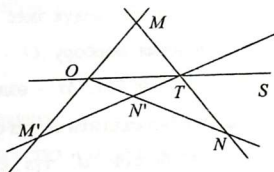
Ошентип, 2^0 - касиет далилденди:

2^0 . Гомологияда тиешелеш түз сызыктар гомология оғунда кесилишет.

Жогорудагы касиеттерден гомологиядагы тиешелеш чекиттерди түзүүнүн ыкмасы келип чыгат.



36-сүрөт



37-сүрөт

M - проективдик тегиздиктин каалагандай чекити, M' - ушул M чекитинин O борборлуу, s октуу гомологиядагы элеси болсун. Тегиздиктеги каалагандай N чекитинин элеси N' төмөндөгүдөй түзүлөт:

а) $O \notin s$ (36-сүрөт), б) $O \in s$ (37-сүрөт).

1) (ON) түз сызыгын жүргүзөбүз, изделүүчү чекит N' ушул түз сызыкка таандык болот.

2) (MN) түз сызыгын жүргүзөбүз.

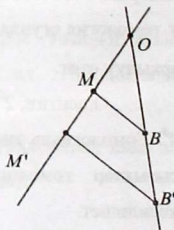
3) $(MN) \cap s = T$ чекитин табабыз.

4) $N' = (ON) \cap (M'T)$ болот.

Кеңейтирилген тегиздиктеги гомологиялар

Кеңейтирилген евклиддик же аффиндик тегиздиктеги h гомологиясынын айрым учурларын карайбыз.

1. Гомология огу s - чексиз алыстатылган, б.а. өздүк эмес түз сызык, ал эми гомология борбору O - өздүк чекит болсун. $M' = h(M)$, M - өздүк чекит деп алалы. Ар бир кадимки d түз сызыгы өзүнө параллель болгон d' түз сызыгына өтөт, себеби d жана $h(d) = d'$ түз сызыктары s гомология оғунда кесилише тургандыгын жогортодон билебиз.



38-сүрөт

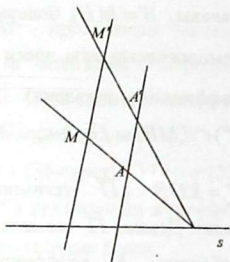
Кадимки $B \notin (OM)$ чекитин алалы. $B' = h(B)$ болсун, б.а. $B' - B$ чекитинин $h: \overline{P} \rightarrow \overline{P}$ гомологиясындагы элеси (\overline{P} -кеңейтирилген евклиддик же аффиндик тегиздик). Анда $(M'B') \parallel (MB)$ болот, б.а. $(M'B') \cap (MB) = D_\infty \in s_\infty$. Эгерде $\vec{OM}' = k \vec{OM}$ болсо, анда $\vec{OB}' = k \vec{OB}$ (\overline{P} тегиздигинин каалагандай B чекити үчүн) орун алат. Демек, Π евклиддик же аффиндик тегиздигинде O борборлуу, k коэффициенттүү гомотетияга ээ болобуз.

Ошентип гомотетия гомологиянын айрым учуру (огу чексиз алыстатылган, б.а. өздүк эмес түз сызык болгон учуру) болот экен.

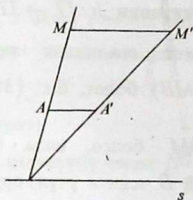
2. $h: \overline{P} \rightarrow \overline{P}$ гомологиясынын огу s - өздүк (кадимки) түз сызык, борбору O - өздүк эмес чекит болсун.

Бул учурда $h: \overline{P} \rightarrow \overline{P}$ гомологиясы Π тегиздигин перспективдүү - аффиндик өзгөртүү болот жана ал гомология огунун жана түгөй тиешелеш M, M' чекиттеринин берилиши менен толук аныкталат. Төмөндөгүдөй учурлардын болушу мүмкүн:

а) $O \notin s$. Бул учурда $(MM'), (AA'), \dots$ түз сызыктары (б.а. түгөй тиешелеш чекиттерди туташтыруучу) Π аффиндик (же евклиддик) тегиздигинде параллель түз сызыктардын боосун түзүшөт. Бул боонун түз сызыктары s гомология огун кесиш өтүшөт (39-сүрөт). Бул учурда гомология «кыйгач кысуу» (косье сжатие) деп аталат, ал эми s огун – кысуу огу деп аташат.



39-сүрөт

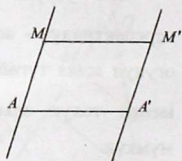


40-сүрөт

б) $O \in s$ болсун (40-сүрөт). Бул учурда деле (MM') , (AA') ,... түз сызыктары Π аффиндик (же евклиддик) тегиздигинде параллель түз сызыктардын боосун түзүшөт, бирок бул түз сызыктардын баары гомология огуна параллель болушат. Демек, гомология - s огу боюнча жылдыруу болот.

3. s - гомология огу өздүк эмес түз сызык, гомология борбору O - өздүк эмес чекит болсун (өзгөчө гомология).

Бул учурда Π аффиндик (же евклиддик) тегиздигинде (MM') , (AA') , (BB') ,... түз сызыктары параллель түз сызыктардын боосун түзүшөт жана $(M'A') \parallel (MA)$, $(A'B') \parallel (AB)$,...болот. Бул



41-сүрөт

→
учурда гомология $\vec{MM'}$ векторуна параллель которуу болуп калат.

1-Мисал. $f: \overline{\Pi} \rightarrow \overline{\Pi}$ проективдик өзгөртүүсү $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ реперине карата төмөндөгүдөй теңдемелери менен берилген:

$$\begin{cases} \lambda y^1 = x^1, \\ \lambda y^2 = x^2, \\ \lambda y^3 = x^1 - x^3. \end{cases}$$

f - гиперболикалык гомология экендигин далилдегиле жана анын борбору менен огу ташкыла.

Чыгаруу. $f: \overline{\Pi} \rightarrow \overline{\Pi}$ проективдик өзгөртүүсүнүн инварианттык чекиттерин табабыз. Бул проективдик өзгөртүүнүн инварианттык чекиттеринин көптүгү $O(0,0,1)$ чекитин жана $s: x^1 - 2x^3 = 0$ түз сызыгынын чекиттерин кармап турат (8-лекциядагы 4-мисалды карагыла). O чекитинин координаталары s түз сызыгынын теңдемесин канааттандырбай тургандыгы көрүнүп турат, б.а. $O \notin s$. Демек, $f: \overline{\Pi} \rightarrow \overline{\Pi}$ - борбору O чекити, ал эми огу s түз сызыгы болгон гиперболикалык гомология экен.

2-Мисал. f гиперболикалык гомологиясы O борбору, s огу, түгөй тиешелеш A жана $f(A) = A'$ чекиттери менен берилген.

- 1) (AA') түз сызыгында жаткан каалагандай M чекитинин элесин түзгүлө;
- 2) Каалагандай түз сызыктын алгачкы элесин түзгүлө;

3) Гомология кеңейтирилген евклидик тегиздикте берилген деп эсептеп, ушул тегиздиктин өздүк эмес (чексиз алыстатылган) түз сызыгын түзгүлө.

Чыгаруу.

1. Тегиздикте каалагандай $B \notin (AA')$ чекитин алабыз жана бул чекиттин элесин табабыз (42-сүрөт).

Гомологиянын касиеттери боюнча

1) $B' \in (OB)$ болот;

2) $B' \in (AT)$, мында $T = (AB) \cap s$.

Демек, $B' = (OB) \cap (A'T)$.

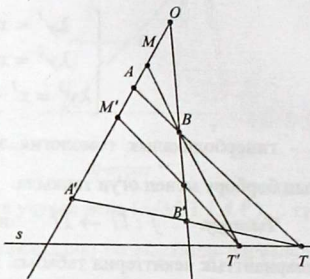
Жогоруда көрсөтүлгөн ыкма менен $M' = f(M)$

чекитин түзөбүз (бул түзүүдө гомология O

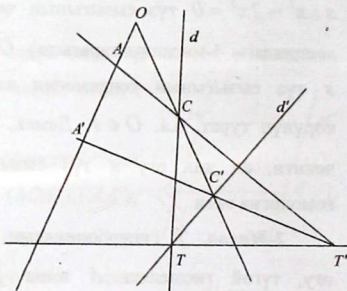
борбору жана түгөй тиешелеш B, B' чекиттери

менен берилген деп эсептейбиз).

2. $d' \cap s = T$ жана бул чекит f өзгөртүүсүнүн кыймылсыз чекити болот. Ошондуктан, d' түз сызыгынын алгачкы элеси T



42-сүрөт



43-сүрөт

чекити аркылуу өтөт. Каалагандай $C' \in d'$ чекитинин алгачкы элесин табабыз. Ал үчүн (OC') түз сызыгын жүргүзөбүз (43-сүрөт).

$$1) (A'C') \cap s = T;$$

2) $(OC') \cap (AT') = C$, $d = (CT)$ - d' түз сызыгынын алгачкы элеси;

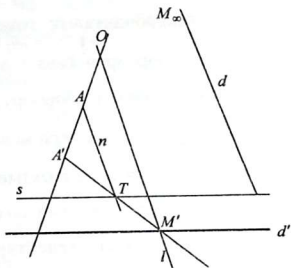
3) Изделүүчү түз сызык гомология огуна параллель жана каалагандай өздүк эмес чекиттин элеси аркылуу өтөт.

Кеңейтирилген

евклиддик тегиздикте d түз сызыгын алабыз жана бул түз сызыктын өздүк эмес M_∞ чекитинин элесин табабыз (44-сүрөт). $l \parallel d$, $O \in l$

болгондой l түз сызыгын түзөбүз. $A \in n$ жана $M_\infty \in n$

болгон (б.а. A чекити аркылуу өтүп, d түз сызыгына параллель болгон) n түз сызыгын жүргүзөбүз. $T = n \cap s$ чекитин белгилейбиз. $(A'T) \cap l = M'$, $M' \in d'$, $d'' \parallel s$ болгондой d' түз сызыгын жүргүзөбүз. Ушул d' - изделүүчү түз сызык.



44-сүрөт

Өз алдынча иштөө үчүн маселелер

1. Тегиздикте f проективдик өзгөртүүсү төмөндөгүдөй формулалар менен берилген:

$$\begin{cases} \lambda y^1 = x^2 + x^3, \\ \lambda y^2 = x^1 + x^2, \\ \lambda y^3 = x^1 + x^3. \end{cases}$$

f - гиперболикалык гомология экендигин далилдегиле.

Анын O борборун жана s огу тапкыла.

2. f гомологиясы O борбору, s огу жана түгөй тиешелеш A жана $A' = f(A)$ чекиттери менен берилген.

а) каалагандай түз сызыктын элесин түзгүлө;

б) каалагандай чекиттин алгачкы элесин түзгүлө;

в) гомологияны кеңейтирилген евклиддик тегиздикте берилген деп эсептеп, өздүк эмес түз сызыктын алгачкы элесин түзгүлө.

3. f гомологиясы O борбору, s огу жана түгөй тиешелеш A жана $A' = f(A)$ чекиттери менен берилген.

1) (AA') түз сызыгында берилген B чекитинин элесин түзгүлө;

2) Берилген C' чекитинин алгачкы элесин түзгүлө;

3) D берилген чекитинин элеси $D' = f(D)$ жана $f(D')$ чекитин түзгүлө.

4. Гиперболикалык гомология s огу, O борбору жана түгөй

a , $f(a) = a'$ түз сызыктары менен берилген. Берилген a түз сызыгы менен s оғунда кесилише тургандай, каалагандай d түз сызыгынын элесин түзгүлө.

5. Гомология бир түз сызыкта жатышпаган A, B, C чекиттери жана алардын $A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C)$ элестери менен берилген. Ошондой эле $(AA'), (BB'), (CC')$ түз сызыктары бир эле чекит аркылуу өтүшөт. Элеси берилген q түз сызыгында жата тургандай жана берилген p түз сызыгына таандык болгон X чекитин тапкыла.

6. Кеңейтирилген евклиддик тегиздиктеги гомология s огу, O борбору жана түгөй тиешелеш A жана $f(A) = A'_\infty$ чекиттери менен берилген.

а) каалагандай чекиттин элесин түзгүлө;

б) каалагандай түз сызыктын элесин түзгүлө;

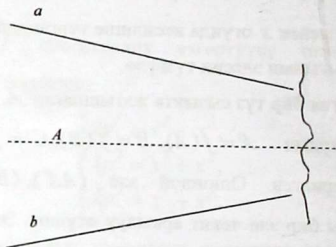
в) өздүк эмес түз сызыктын элеси жана алгачкы элеси табылсын.

7. Берилген квадраттын берилген гомологиядагы элесин түзгүлө.

8. Берилген a жана b түз сызыктарынын кесилиш чекити - жетүүгө мүмкүн болбогон чекит болсун (чиймеден сырттагы). Берилген A чекити жана ушул жетүүгө мүмкүн болбогон чекит аркылуу өтүүчү түз сызыкты түзгүлө (45-сүрөт).

Көрсөтмө: берилген түз сызыктардын бири огу боло тургандай, ал эми экинчисинин элеси изделүүчү түз сызык

боло тургандай гомологияны аныктагыла.



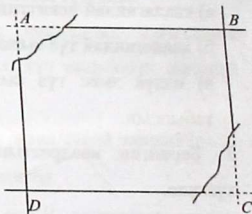
45-сүрөт

9. $ABCD$ параллелограммынын жактары берилген жана анын эки A жана C чокулары – жетүүгү мүмкүн болбогон чекиттер. (AC) түз сызыгын түзгүлө (жүргүзгүлө).

Көрсөтмө.

Огу изделүүчү түз сызыгы боло тургандай, ал эми B чекитинин элеси D боло тургандай гомологияны карагыла.

10*. Кеңейтирилген евклиддик тегиздикте борбору өздүк (кадимки) чекит, ал эми огу



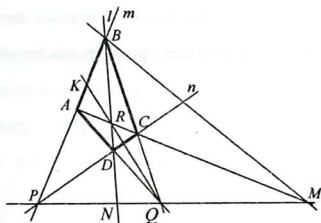
46-сүрөт

өздүк түз сызык болгон f гомологиясы жана айлана берилген. Кандай учурда берилген айлананын f гомологиясындагы элеси эллипс (гипербола, парабола) болот.

10-лекция. Толук төрт чокулук жана анын гармоникалык касиеттери

Аныктоо. Жалпы абалдагы төрт чекит жана аларды эки-экиден туташтыруучу алты түз сызыктан турган фигура *толук төрт чокулук* деп аталат (47-сүрөт).

A, B, C, D - толук төрт чокулуктун чокулары, $(AB), (BD), (CD), (AC), (BC), (AD)$ түз сызыктары – жактары деп аталышат. Жалпы чокуга ээ болушпаган эки жагын – *карама-каршы жактар*



47-сүрөт

деп атап коюшат. (AB) жана (CD) , (BC) жана (AD) , (BD) жана (AC) - түгөй карама-каршы жактары. Карама-каршы жактарынын кесилиш чекиттери P, Q, R диагоналдык чекиттер деп аталышат. Диагоналдык чекиттер аркылуу өтүүчү түз сызыктарды толук төрт чокулуктун диагоналдык чекиттери деп аташат.

Толук төрт чокулуктун касиеттери

I^0 . Толук төрт чокулуктун ар бир жагында төрт гармоникалык чекит жашайт: алардын бир жубу – чокулары, ал эми экинчи жубунун бирөө – диагоналдык чекит, экинчиси – каралып жаткан

жак менен калган эки диагоналдык чекиттер аркылуу өтүүчү түз сызыктын (б.а. диагоналдын) кесилиш чекити болот.

Бул касиетти (AB) жагы үчүн жазсак, анда $(AB, PK) = -1$ (же $(PK, AB) = -1$) болот.

2^o. Толук төрт чокулуктун ар бир диагоналында төрт гармоникалык чекит жашайт: алардын бир жубу – диагоналдык чекиттер, экинчи жубу – каралып жаткан диагональ менен үчүнчү диагоналдык чекит аркылуу өткөн жактардын кесилиш чекиттери болот.

Мисал үчүн, (PQ) диагоналдын карасак, анда $(PQ, NM) = -1$ болот.

1. Берилген үч чекитке төртүнчү гармоникалык чекитти түзүү

a түз сызыгы жана анын P, Q, N ар түрдүү чекиттери берилсин. Бул түз сызыктын $(PQ, MN) = -1$ боло тургандай M чекитин түзгүлө (47-сүрөт).

Түзүү.

1) P чекити аркылуу каалагандай эки m жана n түз сызыктарын жүргүзөбүз.

2) N чекити аркылуу каалагандай l түз сызыгын жүргүзөбүз жана

$l \cap n = D, l \cap m = B$ чекиттерин белгилейбиз.

3) (QD) жана (QB) түз сызыктарын жана $A = (QD) \cap m$, $C = (QB) \cap n$ чекиттерине ээ болобуз.

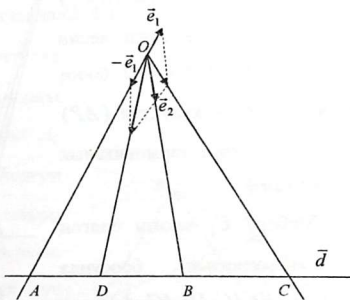
4) (AC) түз сызыгын жүргүзүү менен $ABCD$ толук төрт чокулуна ээ болобуз.

2^0 -касиет боюнча $M = (AC) \cap (PQ)$ - берилген P, Q, N чекиттерине төртүнчү гармоникалык чекит болот.

2. Кеңейтирилген түз сызыкта берилген үч чекитке төртүнчү гармоникалык чекитти түзүү

Эгерде проективдик түз сызык катары кеңейтирилген түз сызыкты алсак, анда берилген A, B, C үч чекитине гармоникалык төртүнчү чекитти түзүүнүн дагы бир ыкмасын көрсөтүүгө болот.

Кеңейтирилген түз сызыкта $\mathfrak{R} = \{A, B, C\}$ проективдик реперин



48-сүрөт

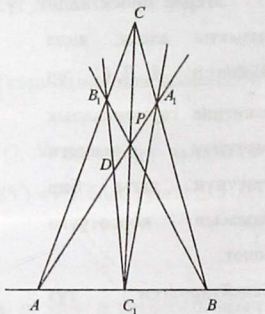
алабыз. D чекити бул реперге карата (d^1, d^2) координаталарына ээ болсун деп алалы. Анда түз сызыктагы төрт чекиттин татаал катышынын касиети боюнча $(AB, CD) = -1$

жана $D(-1, 1)$ экендигин көрөбүз. Белгилүү координаталары боюнча D чекитин $\mathfrak{R} = \{A, B, C\}$ реперине карата түзүү 48-сүрөттө аткарылган.

1-Мисал. Кеңейтирилген евклиддик тегиздикте ABC үч бурчтугу, анын $[CC_1]$ бийиктигинде (же анын уландысында) жаткан P чекити берилген. (AP) жана (BP) түз сызыктары (BC) жана (CA) жактарын тиешелеш түрдө A_1 жана B_1 чекиттеринде кесип өтүшөт. $[C_1P]$ шооласы $\angle A_1C_1B_1$ бурчунун биссектрисасы боло тургандыгын далилдегиле.

Чыгаруу. BCB_1C_1 толук төрт чокулугун карайбыз (49-сүрөт). Эгерде (A_1A) түз сызыгы (B_1C_1) түз сызыгын D чекитинде кесип өтсө, анда $(AP, DA_1) = -1$ болот (б.а. толук төрт чокулуктун (AP) диагоналында төрт гармоникалык чекит жашайт).

Анда борбору C_1 чекити болгон түз сызыктардын боосунда (C_1A) , (C_1P) , (C_1D) , (C_1A_1) төрт



49-сүрөт

түз сызыгы гармоникалык түз сызыктар болушат (7-лекцияны карагыла), б.а. алардын татаал катышы -1 ге барабар. Мындан ары түз сызыктардын гармоникалык төрттүгүн

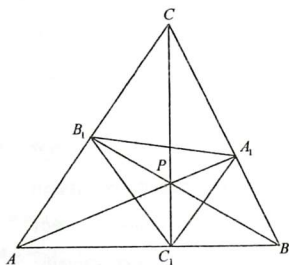
$((C_1A), (C_1P)) \stackrel{h}{=} ((C_1D), (C_1A_1))$ көрүнүшүндө белгилейбиз.

Эгерде гармоникалык төрт түз сызыктын эки түйүндөш түз сызыгы өз ара перпендикуляр болушса, анда алар калган эки түз сызыктын симметрия октору боло тургандыгы [1] белгилүү. Демек, (C_1P) шооласы $\angle B_1C_1A_1$ бурчун тең экиге бөлөт.

2-Мисал. Үч бурчтуктун бийиктиктери же алардын уландылары бир чекитте кесилише тургандыгын далилдегиле.

Чыгаруу. ABC үч бурчтугунун $[AA_1]$ жана $[BB_1]$ бийиктиктери (же алардын уландылары) ар дайым кесилишет (50-сүрөт). Алардын кесилиш чекитин P аркылуу белгилеп коелу. (CP) түз сызыгы $[AB]$ жагын C_1 чекитинде кесип өтсүн. $[CC_1]$ бийиктик экендигин далилдейбиз.

$\triangle A_1B_1C_1$ үч бурчтугун карайбыз. Жогорудагы мисалды эске алсак, анда A_1 жана B_1 чокулары болгон бурчтардын биссектрисалары P чекитинде кесилишет экен. Демек, (C_1P) - бул үч бурчтуктун үчүнчү биссектрисасы болот. Бирок,



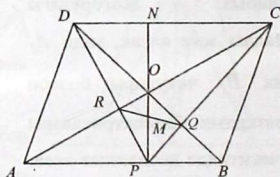
50-сүрөт

$((C_1A), (C_1P)) \stackrel{h}{=} ((C_1B_1), (C_1A_1))$ жана (C_1P) түз сызыгы

(C_1A_1) жана (C_1B_1) түз сызыктары үчүн симметрия огу болгондуктан, (C_1A) түз сызыгы алардын экинчи симметрия огу болот. Демек (CC_1) жана (C_1A) түз сызыктары перпендикуляр болушат, б.а. $[CC_1]$ - бийиктик жана үч бийиктик (же алардын уландылары) бир чекитте кесилишет экен.

3-Мисал. $ABCD$ параллелограммынын $[AB]$ жагында каалагандай P чекити берилген. (PC) жана (PD) түз сызыктары $[BD]$ жана $[AC]$ диагоналдарын тиешелеш түрдө Q жана R чекиттеринде кесип өтүшөт. PQR үч бурчтугунун аянты PQO үч бурчтугунун аянтынан эки эсе чоң экендигин далилдегиле (мында O - параллелограммдын диагоналдарынын кесилиш чекити).

Чыгаруу. (PO) түз сызыгы $[QR]$ менен M чекитинде, ал эми $[CD]$ жагы менен N чекитинде кесилишсин (51-сүрөт).



51-сүрөт

$PQOR$ толук төрт чокулугун карайбыз. Анын (PO) жагында төрт гармоникалык чекит жашайт:

P, O, M, N . Бирок, $(PO, N) = -2$ болгондуктан,

$$\frac{|PM|}{|MO|} = \frac{|PN|}{|ON|} = 2 \text{ болот. Мындан } |PM| = 2|MO| \text{ келип чыгат.}$$

Демек, $S_{PQR} = 2S_{QRO}$.

4-Мисал. Кеңейтирилген тегиздикте $[AB]$ кесиндиси, анын орто чекити C жана (AB) түз сызыгында жатпаган M чекити берилген. Сызгычтын гана жардамы менен M чекити аркылуу өтүп, (AB) түз сызыгына параллель болгон түз сызыкты жүргүзгүлө.

Чыгаруу.

Анализ. Маселе чыгарылган деп эсептейли жана (MN) түз сызыгы (52-сүрөт) жүргүзүлгөн. \bar{d} аркылуу кеңейтирилген тегиздиктеги A жана B чекиттери аркылуу өтүүчү түз сызыкты белгилейбиз, D_∞ - анын өздүк эмес чекити болсун. Берилген маселени төмөндөгүдөй маселеге алып келдик: берилген M чекити жана жетүүгө мүмкүн болбогон $D_\infty \in (AB)$ чекити аркылуу өтүүчү (MD_∞) түз сызыгын жүргүзгүлө $((AB, CD_\infty) = -1)$. Толук төрт чокулуктун касиеттеринен колдонобуз. Кандайдыр бир $MKNP$ толук төрт чокулугун A жана B чекиттери анын диагоналдык чекиттери боло тургандай, ал эми C чекити үчүнчү диагоналдык чекит аркылуу өтүүчү жагында жата тургандай түзүп алабыз. K чекитин C чекити аркылуу өтүүчү түз сызык менен (MA) түз сызыгынын кесилиш чекити катары түзөбүз. $P = (CK) \cap (BM)$, $N = (KB) \cap (AP)$ экендигин көрөбүз.

Түзүү.

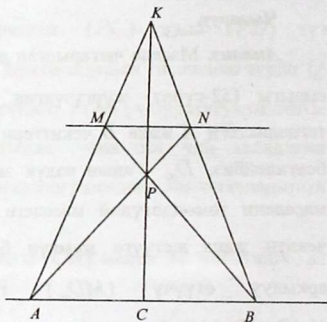
1) (MA) жана (MB) түз сызыктарын жүргүзөбүз.

2) C чекити аркылуу өтө тургандай, бирок A жана M чекиттери аркылуу өтпөгөн кандайдыр бир түз сызыкты жүргүзөбүз. Бул түз сызык (MA) , (MB) түз сызыктарын тиешелеш түрдө K жана P чекиттеринде кесип өтөт (53-сүрөт).

3) (KB) жана (AP) түз сызыктарын жүргүзөбүз, $(KB) \cap (AP) = N$ болот. (MN) - изделүүчү түз сызык.

Далилдөө.

$MKNP$ - толук төрт чокудук, ал эми A жана B - анын диагоналдык чекиттери болгондуктан, эгерде $X = (AB) \cap (MN)$ болсо, анда $(AB, CX) = -1$ болмок. Маселенин шарты боюнча C чекити $[AB]$ кесиндисинин орто чекити.



52-сүрөт

Демек, X - өздүк эмес (б.а.

чексиз алыстатылган) чекит: $X \equiv D_{\infty} \in \bar{d}$. Мындан $(AB) \parallel (MN)$ экендиги келип чыгат.

Изилдөө. 1)-3) түзүүлөрдү ар дайым аткарууга болот. Демек маселе ар дайым чечимге ээ жана чечим жалгыз болот (паралеллдүүлүк аксиомасы боюнча).

Өз алдынча иштөө үчүн маселелер

1. ABC үч бурчтугунун C чокусуна жүргүзүлгөн бийиктиги жана медианасы бул чокудагы бурчту барабар үч бөлүккө бөлөт. Анда $\angle C$ бурчу тик бурч экендигин далилдегиле.

Көрсөтмө. Эгерде l түз сызыгы түгөй a жана b түз сызыктары үчүн симметрия огу болсо, ал эми бул түгөй түз сызыктар c жана d түгөй түз сызыктары менен гармоникалык төрттүктү түзүшсө, анда

$$\operatorname{tg}^2(l, f) = \operatorname{tg}(l, c) \cdot \operatorname{tg}(l, d)$$

экендиги белгилүү, мында (l, f) - l жана f түз сызыктарынын арасындагы бурч.

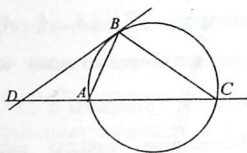
2. A_1, B_1, C_1 - ABC үч бурчтугунун биссектрисаларынын негиздери. Эгерде $\angle A_1C_1B_1 = 90^\circ$ болсо, анда ABC үч бурчтугунун $\angle ACB$ бурчун тапкыла.
3. Айлананын $[AB]$ диаметринин учтары менен C жана D чекиттери гармоникалык төрттүктү түзүшөт. Эгерде M - айланада жаткан каалаган чекит болсо, анда $|MC| \cdot |MD|$ катышы турактуу экендигин далилдегиле.
4. Айлананын $[AB]$ диаметрине перпендикуляр болгон хорданын учтарын айлананын каалаган чекити менен туташтыруучу түз сызыктар $[AB]$ диаметрин A жана B чекиттери менен гармоникалык төрттүктү түзө тургандай C

жана D чекиттеринде кесип өтүшө тургандыгын далилдегиле.

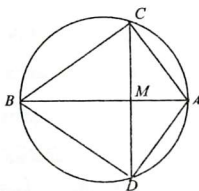
5. Сызгычты гана пайдаланып, берилген чекит жана берилген эки түз сызыктын жетүүгө мүмкүн болбогон кесилиш чекити аркылуу өтүүчү түз сызыкты жүргүзүлө.
6. $ABCD$ төрт бурчтугунун D чокусу – жетүүгө мүмкүн болбогон чекит. Бул төрт бурчтуктун диагоналдарынын кесилиш чекитин тапкыла.
7. Евклиддик тегиздикте эки параллель түз сызык жана алардын биринде жаткан $[AB]$ кесиндиси берилген. Сызгычты гана пайдаланып, $[AB]$ кесиндисин тең экиге бөлүлө.
8. Евклиддик тегиздикте эки параллель түз сызык жана алардын биринде жаткан $[AB]$ кесиндиси берилген. Сызгычты гана пайдаланып, $[AB]$ кесиндисин барабар 3, 4, 5, 6 бөлүккө бөлүлө.
9. Евклиддик тегиздикте эки параллель түз сызык жана алардын биринде жатуучу $[AB]$ кесиндиси берилген. Сызгычты гана пайдаланып, $[AB]$ кесиндисин эки эселендиргиле.
10. Евклиддик тегиздикте параллелограмм берилген. Сызгычты гана пайдаланып, анын диагоналдарынын кесилиш чекити аркылуу жактарына параллель болушкан түз сызыктарды жүргүзүлө.

11. Каалагандай үч бурчтукка сырттан сызылган айлананын үч бурчтуктун чокусу аркылуу жүргүзүлгөн жанымасы ал чокунун каршысындагы жакты жандаш жаткан жактардын квадраттарына барабар болгон катышта сырттан бөлө тургандыгын далилдегиле.

Көрсөтмө: ABC үч бурчтугуна сырттан сызылган айлананын B чокусу аркылуу өтүүчү жанымасын жүргүзүлө (53-сүрөт), $[AC]$ жагынын уландысы менен бул жаныманын кесилиш чекитин D аркылуу белгилегиле. $\triangle DAB$ жана $\triangle DBC$ үч бурчтуктарынын окшоштугун колдонгула.



53-сүрөт



54-сүрөт

12. Айлананын $[AB]$ диаметринин M чекитинде перпендикуляр тургузулган жана ал перпендикуляр айлана менен C жана D чекиттеринде кесилишет. $ABCD$ төрт бурчтуктунун карама-каршы жактарынын узундуктарынын көбөйтүндүлөрү барабар экендигин далилдегиле.

Көрсөтмө. Айланага ичтен сызылган жана карама-каршы жактарынын узундуктарынын көбөйтүндүлөрү барабар болушкан

төрт бурчтукту гармоникалык төрт бурчтук деп атайбыз. Ал эми ал төрт бурчтуктун чокуларын айлананын гармоникалык чекиттери деп атайбыз.

Гармоникалык төрт бурчтуктун эки карама-каршы жактарынын көбөйтүндүсү анын диагоналдарынын узундуктарынын көбөйтүндүсүнүн жарымына барабар экендигин көрсөтүү жетиштүү.

11-лекция. Проективдик тегиздиктин мнимый чекиттери. Проективдик тегиздиктеги экинчи тартиптеги ийрилер

I. Эгерде проективдик тегиздикте $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ репери берилген болсо, анда тегиздиктин каалагандай чекити (x^1, x^2, x^3) координаталарына ээ болот. (Мындагы x^1, x^2, x^3 - бир учурда нөлгө барабар болушпаган чыныгы сандар). Проективдик тегиздикти мнимый чекиттер деп аталышкан чекиттер менен толуктайбыз.

Тандалып алынган \mathfrak{R} реперине карата чекит деп бир учурда нөлгө барабар болушпаган, ирети менен алынган сандардын каалагандай (x^1, x^2, x^3) үчтүгүн атоону макулдашып алалы. Мында $(x^1, x^2, x^3) \in C^3$, C - комплекстик сандардын талаасы, $C^3 = C \times C \times C$. x^1, x^2, x^3 сандары чекиттин координаталары деп аталышат. (x^1, x^2, x^3) жана (y^1, y^2, y^3) чекиттери качан

гана ушундай $\lambda \in \mathbb{C}$ саны табылып, $y^1 = \lambda x^1$, $y^2 = \lambda x^2$, $y^3 = \lambda x^3$ орун алган учурда дал келишет. Ошентип, чекиттин координаталары $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ жалпы көбөйтүүчүсүнө чейинки тактыкта аныкталышат. Эгерде M чекитинин координаталары чыныгы сандар болушса, же аларды кандайдыр бир $\lambda \neq 0$ комплекстик санына көбөйтүү менен чыныгы сандарга алынып келинсе, анда M чекити **чыныгы чекит** деп аталат. Эгерде бул шарттар аткарылбаса, анда ал чекит **мнимый чекит** деп аталат. Мисал үчүн, $A(2, -1, 5)$ жана $B(3i, -i, 4i)$ чекиттери – чыныгы чекиттер, ал эми $C(2i, -i, 3)$ чекити – мнимый чекит.

Биз проективдик тегиздикте бардык чокулары жана бирдик чекити чыныгы чекиттер боло тургандай гана реперлерди карайбыз. Ошондуктан, бир реперден экинчи реперге өтүүнүн матрицасынын элементтери чыныгы сандар болушат. Мнимый чекит түшүнүгү реперди тандап алуудан көз каранды эмес экендигин көрсөтүүгө болот.

Бардык чыныгы жана мнимый чекиттердин көптүгүн **комплекстик проективдик тегиздик** деп атайбыз.

Эгерде A_1 жана A_2 чекиттеринин координаталары төмөндөгүдөй көрүнүштө болсо:

$A_1(a^1 + b^1i, a^2 + b^2i, a^3 + b^3i)$, $A_2(a^1 - b^1i, a^2 - b^2i, a^3 - b^3i)$

(мында a^1, b^1 - чыныгы сандар, $i^2 = -1$), анда бул чекиттерди **комплекстик-түйүндөш чекиттер** деп аташат. Мисалы,

$A_1(2+i, 3-i, 4)$ жана $A_2(4-2i, 6+2i, 8)$ чекиттери комплекстик-түйүндөш чекиттер болушат, себеби, A_2 чекитинин координаталарын $\frac{1}{2}$ санына көбөйтүү менен төмөндөгү көрүнүшкө алып келебиз: $A_2(2-i, 3+i, 4)$. «Комплекстик-түйүндөш чекиттер» түшүнүгү да реперди тандап алуудан көз каранды эмес экендигин оңой эле далилдөөгө болот.

Комплекстик проективдик тегиздиктин түз сызыгы деп тандалып алынган реперге карата (x^1, x^2, x^3) координаталары

$$u_1x^1 + u_2x^2 + u_3x^3 = 0$$

теңдемесин канаатандыра тургандай бардык (чыныгы жана мнимый) чекиттердин көптүгүн атайбыз. Мындагы u_1, u_2, u_3 коэффициенттери (түз сызыктын координаталары) – бир учурда нөлгө барабар болушпаган комплекстик сандар болушат. Түз сызыктын координаталары дагы $\lambda \in C, \lambda \neq 0$ жалпы көбөйтүүчүсүнө чейинки тактыкта аныкталат.

Эгерде түз сызыктын координаталары u_1, u_2, u_3 - чыныгы сандар болушса, же аларды кандайдыр бир $\lambda \in C, \lambda \neq 0$ санына көбөйтүү менен чыныгы сандарга алынып келинсе, анда бул түз сызык *чыныгы түз сызык* деп аталат.

Эгерде бул шарттар аткарылбаса, анда түз сызыкты *мнимый түз сызык* деп аташат.

Төмөндөгү ырастоолордун далилдөөлөрү жеңил болгондуктан, окурманга өз алдынча иштөө үчүн сунуштайбыз.

- 1) Ар бир чыныгы түз сызыкта чексиз көп мнимый чекиттер жатышат.
- 2) Ар бир мнимый түз сызыкта бир чыныгы чекит жатат.
- 3) Эки чекит аркылуу бир жана бир гана түз сызык өтөт. Эки комплекстик-түйүндөш чекиттер аркылуу өткөн түз сызык чыныгы түз сызык болот.
- 4) Ар кандай эки түз сызык бир чекитте (чыныгы же мнимый) кесилишет.

2. P_2 проективдик тегиздигинде $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ репери берилген болсун.

Аныктоо. Координаталары (x^1, x^2, x^3) төмөндөгүдөй теңдемени канаатандыра тургандай $M \in P_2$ чекиттердин көптүгү экинчи тартиптеги сызык деп аталат:

$$a_{11}x^1x^1 + a_{22}x^2x^2 + a_{33}x^3x^3 + 2a_{12}x^1x^2 + 2a_{13}x^1x^3 + 2a_{23}x^2x^3 = 0, \quad (1)$$

мындагы a_{11}, a_{22}, a_{33} - чыныгы сандар жана алар бир учурда нөлгө барабар болушпайт, $a_{ij} = a_{ji}$, б.а. $A = (a_{ij})$ матрицасы - симметриялуу матрица. Эйнштейндин суммалоо эрежесин пайдаланып, (1) теңдемени төмөндөгүдөй жазууга болот:

$$a_{ij}x^i x^j = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (1')$$

(1) теңдеменин сол жагы – экинчи даражадагы бир тектүү көп мүчө, б.а. квадраттык форма болуп эсептелет. Аны $\Phi(X)$ аркылуу белгилеп алалы:

$$\Phi(X) = a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + a_{33}(x^3)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + 2a_{13}x^1x^3 + 2a_{23}x^2x^3.$$

Анда (1) теңдемени $\Phi(X) = 0$ көрүнүшүндө жазууга болот.

(1) теңдеменин сол жагын төмөндөгүдөй жазып алалы:

$$(a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + a_{13}x^3)x^1 + (a_{21}x^1 + a_{22}x^2 + a_{23}x^3)x^2 + (a_{31}x^1 + a_{32}x^2 + a_{33}x^3)x^3 = 0.$$

$$\Phi_1(X) = a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + a_{13}x^3,$$

$$\Phi_2(X) = a_{21}x^1 + a_{22}x^2 + a_{23}x^3,$$

$$\Phi_3(X) = a_{31}x^1 + a_{32}x^2 + a_{33}x^3.$$

белгилөөлөрүн киргизели. Анда экинчи тартиптеги ийринин теңдемеси

$$\Phi_1(x)x^1 + \Phi_2(X)x^2 + \Phi_3(X)x^3 = 0$$

көрүнүшүнө келет.

$\Phi(X)$ квадраттык формасы менен бирге $\Psi(X, Y)$ кош сызыктуу формасын карайбыз:

$$\Psi(X, Y) = \Phi_1(X)y^1 + \Phi_2(X)y^2 + \Phi_3(X)y^3.$$

Бул кош сызыктуу форма үчүн $\Psi(X, X) = \Phi(X)$, $\Psi(X, Y) = \Psi(Y, X)$ шарттары (касиеттери) аткарылат.

Экинчи тартиптеги ийринин түз сызык менен кесилиши

Q экинчи тартиптеги ийриси (1) теңдемеси менен берилген болсун. $A(a^1, a^2, a^3)$, $B(b^1, b^2, b^3)$ чекиттери менен берилген a түз сызыгын алабыз. Бул түз сызыктын параметрдик теңдемелерин жазып коелу:

$$y^i = \lambda a^i + \mu b^i. \quad (2)$$

Экинчи тартиптеги ийри менен түз сызыктын кесилиш чекиттерин табуу үчүн (1) жана (2) теңдемелердин системасын карайбыз. (2) теңдемелердеги y^1, y^2, y^3 төрдү (1) теңдемеге ордуна коюп, төмөндөгүдөй квадраттык теңдемеге ээ болобуз (λ жана μ га карата):

$$\Phi(A)\lambda^2 + 2\lambda\mu\Psi(A, B) + \mu^2\Phi(B) = 0. \quad (3)$$

Төмөндөгүдөй учурлардын болушу мүмкүн:

- 1) $\Phi(A) \neq 0$. Анда (3) теңдеме эки чечимге ээ болот, демек, a түз сызыгы Q ийрисин эки чекитте кесип өтөт;
- 2) $\Phi(A) = \Phi(B) = 0$. Бул учурда дагы a түз сызыгы Q ийриси менен эки чекитте кесилишет;
- 3) $\Phi(A) = \Phi(B) = \Psi(A, B) = 0$. Бул учурда Q экинчи тартиптеги ийриси түгөй түз сызыктарга ажырайт, себеби (3) теңдеме чексиз көп тамырларга ээ болот.

Эгерде (3) теңдеме бирдей эки тамырга ээ болсо, анда Q ийриси a түз сызыгы менен эки дал келүүчү чекиттерде

кесилишет. Бул учурда a түз сызыгы Q экинчи тартиптеги ийрисиинин *жанымасы* деп аталат.

Ушул жаныманын теңдемесин табалы.

$A(a^1, a^2, a^3)$ - жануу чекити, $X(x^1, x^2, x^3)$ - жаныма түз сызыктын каалаган чекити болсун. Анда анын теңдемесин $y^i = \lambda a^i + \mu x^i$ көрүнүшүндө жазып алабыз. (3) теңдемедеги B чекитинин ордуна X чекитин коёбуз:

$$\Phi(A)\lambda^2 + 2\lambda\mu\Phi(A, X) + \mu^2\Phi(X) = 0, \quad (4)$$

мындагы $\Phi(A) = 0$, себеби A чекити Q ийрисинде жатат.

Демек, (4) теңдеме төмөндөгүдөй көрүнүшкө келет:

$$\mu(2\lambda\Psi(A, X) + \mu\Phi(X)) = 0. \quad (5)$$

Мындан $\mu_1 = 0$ экендигин көрөбүз. Бирок (5) теңдеменин тамырлары барабар болушкандыктан, $\mu_2 = 0$ болот. Демек, $2\lambda\Psi(A, X) = 0$. Мындан $\lambda \neq 0$ болгондуктан

$$\Psi(A, X) = 0 \quad (6)$$

теңдемесине ээ болобуз. Бул теңдеменин сол жагын ачып жазалы:

$$\Phi_1(A)x^1 + \Phi_2(A)x^2 + \Phi_3(A)x^3 = 0, \quad (7)$$

мындагы x^1, x^2, x^3 - жаныманын каалагандай чекитинин координаталары.

(7) - Q ийрисиинин жанымасынын теңдемеси.

Качан (7) теңдемедегі $\Phi_1(A), \Phi_2(A), \Phi_3(A)$ коэффициенттери бир учурда нөлгө барабар боло тургандыгын карайлы (анда ийринин A чекитиндеги жанымасы жашабайт).

$\Phi_1(A) = 0, \Phi_2(A) = 0, \Phi_3(A) = 0$ деп алалы. Жогорудагы белгилөөлөрдү эске алып, бул барабардыктарды ачып жазабыз:

$$\begin{cases} a_{11}a^1 + a_{12}a^2 + a_{13}a^3 = 0, \\ a_{21}a^1 + a_{22}a^2 + a_{23}a^3 = 0, \\ a_{31}a^1 + a_{32}a^2 + a_{33}a^3 = 0. \end{cases} \quad (*)$$

Төмөндөгүдөй учурлардын болушу мүмкүн:

1) $\det(a_{ij}) \neq 0$, анда (*) системасы нөлдүк чечимден башка чечимдерге ээ болбойт. Демек, (7) теңдеменин коэффициенттери нөлгө барабар боло тургандай чекит проективдик тегиздикте жашабайт, б.а. Q ийрисинин каалаган чекитиндеги жанымасы жашайт.

2) $\det(a_{ij}) = 0, \text{rang}(a_{ij}) < 3$. Анда (*) системасы нөл эмес чечимге ээ болот. Демек, Q ийрисинде ушундай чекиттер табылып, ал чекиттерде жаныма жашабайт. Мындай чекиттер *өзгөчө чекиттер* деп аталышат.

Мисал. $\mathcal{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ проективдик реперинин бардык чекиттери аркылуу өтүүчү жана $x^1 + x^3 = 0$ түз сызыгын A_1 чекитинде жануучу экинчи тартиптеги ийринин теңдемесин ташкыла.

Чыгаруу. (1') теңдемесине \mathcal{R} реперинин чекиттеринин координаталарын ордуна коебуз: $A_1(1,0,0)$, $A_2(0,1,0)$, $A_3(0,0,1)$, $E(1,1,1)$. Бул чекиттер аркылуу изделүүчү ийри өткөндүктөн

$$a_{11} = 0, a_{22} = 0, a_{33} = 0, a_{12} + a_{13} + a_{23} = 0$$

келип чыгат, a_{12} , a_{13} , a_{23} - бир учурда нөлгө барабар болушпайт. Ошентип, экинчи тартиптеги ийринин теңдемеси

$$a_{12}x^1x^2 + a_{13}x^1x^3 + a_{23}x^2x^3 = 0 \quad (8)$$

көрүнүшүндө болот жана $a_{12} + a_{13} + a_{23} = 0$, бирок a_{12} , a_{13} , a_{23} - бир учурда нөлгө барабар болушпайт.

(1') теңдемеси менен берилген экинчи тартиптеги ийринин $P(p^1, p^2, p^3)$ чекитиндеги жанымасынын теңдемеси

$$(a_{11}p^1 + a_{12}p^2 + a_{13}p^3)x^1 + (a_{12}p^1 + a_{22}p^2 + a_{23}p^3)x^2 + (a_{13}p^1 + a_{23}p^2 + a_{33}p^3)x^3 = 0$$

көрүнүшүндө боло тургандыгын жогортодон билебиз. Биздин мисалда ийринин теңдемеси (8) көрүнүшкө ээ жана A_1 чекитинин координаталары $A_1(1, 0, 0)$ (б.а. $p^1 = 1$, $p^2 = 0$, $p^3 = 0$). Ошондуктан жаныманын теңдемеси төмөндөгүдөй болот:

$$a_{12}x^2 + a_{13}x^3 = 0.$$

Шарт боюнча $x^2 + x^3 = 0$ түз сызыгы ийринин A_1 чекитиндеги жанымасы болгондуктан, $a_{12} = a_{13}$ экендиги келип чыгат. $a_{12} + a_{13} + a_{23} = 0$ шартынан $a_{23} = -2a_{12}$ барабардыгына ээ болобуз. Жогорудагыларды эске алуу менен экинчи тартиптеги ийринин теңдемеси төмөндөгүдөй көрүнүшкө келет:

$$a_{12}x^1x^2 + a_{12}x^1x^3 - 2a_{12}x^2x^3 = 0$$

же

$$x^1x^2 + x^1x^3 - 2x^2x^3 = 0.$$

Өз алдынча иштөө үчүн маселелер

1. Экинчи тартиптеги ийри түгөй түз сызыктарга ажырай тургандыгын көрсөткүлө жана ал түз сызыктардын теңдемелерин жазгыла:

а) $4(x^1)^2 - 3(x^2)^2 + 4x^1x^2 - x^2x^3 + 2x^1x^3 = 0;$

б) $2(x^1)^2 + 3(x^2)^2 + (x^3)^2 + 5x^1x^2 + 4x^2x^3 + 3x^1x^3 = 0.$

2. Төмөндөгү беш чекит аркылуу өтүүчү экинчи тартиптеги ийринин теңдемесин жазгыла:

а) $A_1(1, 0, 0), A_2(0, 1, 0), A_3(0, 0, 1), A_4(1, 1, 1), A_5(1, 2, 3)$;

б) $A_1(1, 0, 0), A_2(0, 1, 0), A_3(0, 0, 1), A_4(1, 1, 1), A_5(1, 0, 1)$.

3. $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ реперинин бардык чекиттери аркылуу өтүүчү экинчи тартиптеги ийринин теңдемесинин жалпы көрүнүшүн жазгыла.
4. $(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$ теңдемеси менен берилген экинчи тартиптеги ийринин $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ реперинин каалаган эки чекити аркылуу өтүүчү түз сызык менен кесилиш чекиттерин тапкыла.
5. $(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$ теңдемеси менен берилген экинчи тартиптеги ийринин $A(1, 1, 0)$ жана $B(-1, 0, 1)$ чекиттери аркылуу өтүүчү түз сызык менен кесилиш чекиттерин тапкыла.
6. $2x^1x^2 - x^2x^3 - x^1x^3 = 0$ теңдемеси менен берилген экинчи тартиптеги ийринин A чекитиндеги жанымасынын теңдемесин жазгыла:
- а) $A(0, 0, 1)$; б) $A(1, 1, 1)$; в) $A(3, 6, 4)$.
7. $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ проективдик реперинин бардык чекиттери аркылуу өтүүчү жана $x^1 + x^2 = 0$ түз сызыгын A_3 чекитинде жануучу экинчи тартиптеги ийринин теңдемесин жазгыла.

8. $Q: (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$ экинчи тартиптеги ийриси менен $A(1, 7, 2)$, $B(7, -1, 0)$ чекиттери аркылуу өтүүчү түз сызыктын кесилиш чекиттерин тапкыла.
9. $Q: (x^2)^2 + 2(x^3)^2 - x^1x^2 - 5x^2x^3 = 0$ экинчи тартиптеги ийрисинин $A(1, 0, 0)$, $C(1, 1, 0)$ чекиттериндеги жанымаларынын теңдемелерин жазгыла.
10. $Q: 3(x^1)^2 + (x^2)^2 - 5(x^3)^2 + 2x^1x^2 + 2x^1x^3 - 4x^2x^3 = 0$ экинчи тартиптеги ийрисине $A(3, -2, 2)$ чекити аркылуу жүргүзүлгөн жанымалардын теңдемелери табылсын.

12-лекция. Полюс жана поляра, алардын касиеттери

Проективдик тегиздикте Q экинчи тартиптеги ийриси (1) теңдемеси менен берилген ($\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ проективдик реперине карата): $\Phi(X) = 0$.

$\Psi(X, Y)$ кош сызыктуу формасын жазып алалы:

$$\Psi(X, Y) = a_{11}x^1y^1 + a_{12}x^1y^2 + a_{13}x^1y^3 + a_{21}x^2y^1 + a_{22}x^2y^2 + a_{23}x^2y^3 + a_{31}x^3y^1 + a_{32}x^3y^2 + a_{33}x^3y^3.$$

Проективдик тегиздикте A жана B чекиттерин алабыз.

Аныктоо. Эгерде $\Psi(A, B) = 0$ болсо, анда проективдик тегиздиктин B чекити Q экинчи тартиптеги ийрисине карата A чекитине *түйүндөш чекит* деп аталат.

Аныктоо. Q экинчти тартиптеги ийрисине карата A чекити менен түйүндөш болушкан проективдик тегиздиктин бардык чекиттеринин көптүгү A чекитинин *полярасы* деп аталат. A чекитин поляранын *полюсу* деп атап коюшат.

A чекитинин полярасынын теңдемесин табабыз жана поляр – түз сызык экендигин көрсөтөбүз. X - A чекитинин полярасына таандык болгон каалаган чекит болсун дейли. Анда поляранын аныктоосу боюнча $\Psi(A, X) = 0$ болот. Барбардыктын сол жагын ачып жазалы:

$$\Phi_1(A)x^1 + \Phi_2(A)x^2 + \Phi_3(A)x^3 = 0. \quad (1)$$

(1) – биринчи даражадагы теңдеме, демек, ал түз сызыкты аныктайт. Ал эми x^1, x^2, x^3 - поляранын каалаган чекитинин координаталары болгондуктан, (1) - A чекитинин полярасы болот. $\text{rang}(a_{ij}) = 3$ болсун дейли. Анда тегиздиктин каалагандай A чекити үчүн $\Phi_1(A), \Phi_2(A), \Phi_3(A)$ коэффициенттери бир учурда нөлгө барабар болушпайт. Демек, A чекити үчүн поляр а жашайт.

Тескерисинче ырастоо да туура болот: кандай гана түз сызыкты албайлы, анын полюсу жашайт, б.а. ушундай A чекити табылып, бул чекит үчүн алдын ала берилген түз сызык Q ийрисине карата поляра болот.

Чындыгында эле төмөндөгүдөй теңдемеси менен берилген a түз сызыгын алалы:

$$u_1x^1 + u_2x^2 + u_3x^3 = 0. \quad (2)$$

Бул түз сызыктын полюсун табуу үчүн (1) жана (2) теңдемелер бир эле түз сызыкты аныкташсын деген шарт коелу. Эки теңдеме бир эле түз сызыкты аныкташы үчүн ал теңдемелердеги тиешелеш коэффициенттердин пропорционалдуу болуштары зарыл жана жетиштүү экендигин билебиз, б.а.

$$\Phi_1(A) = \lambda u^1, \quad \Phi_2(A) = \lambda u^2, \quad \Phi_3(A) = \lambda u^3 \quad (3)$$

орун алат, мында $\lambda \in R, \lambda \neq 0$. (3) барабардыктарды ачып жазалы:

$$\begin{cases} a_{11}a^1 + a_{12}a^2 + a_{13}a^3 = \lambda u^1, \\ a_{21}a^1 + a_{22}a^2 + a_{23}a^3 = \lambda u^2, \\ a_{31}a^1 + a_{32}a^2 + a_{33}a^3 = \lambda u^3. \end{cases} \quad (3')$$

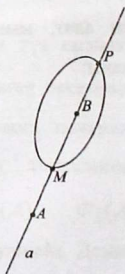
Бул бир тектүү эмес система, $\det(a_{ij}) \neq 0$. Демек, (3') теңдемелер системасы жалгыз гана (a^1, a^2, a^3) чечимине ээ болот. Бул чечим a түз сызыгынын полюсунун координаталары болуп эсептелет.

Ошентип, эгерде Q - кубулбаган ийри болсо, анда бул ийринин жардамы менен проективдик тегиздиктин бардык чекиттеринин көптүгүн ал тегиздиктин бардык түз сызыктарынын көптүгүнө p өз ара бир маанилүү чагылтуусу аныкталат: $\forall A \in P_2 : p(A) = a$, $a - A$ чекитинин полярасы. Ушундайча аныкталган p чагылтуусу *поляритет* деп аталат.

Полюстардын жана поляралардын касиеттери

1°. A чекити Q экинчи тартиптеги ийрисиине таандык болсун. Анда (1) теңдеме жаныманын (7) теңдемеси (11-лекцияны карагыла) менен дал келет. Бул учурда A чекитинин полярасы Q экинчи тартиптеги ийрисинин ушул A чекитиндеги жанымасы болот.

2°. $A \notin Q$ болсун. A чекити аркылуу Q экинчи тартиптеги ийрисин M жана P



55-сүрөт

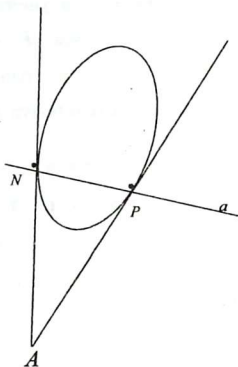
чекиттеринде кесип өтүүчү түз сызыкты жүргүзөлү. Анда бул түз сызыкта $(AB, MP) = -1$ шартын канааттандыра тургандай B чекити жашайт, б.а. A, B, M, P төрт чекити – гармоникалык төрт чекит болот жана B чекити A чекитинин полярасына таандык болот.

3°. $\Psi(X, Y) = \Psi(Y, X)$ болгондуктан, эгерде $\Psi(A, B) = 0$ болсо, анда $\Psi(B, A) = 0$ болот, б.а. B чекити A чекитинин

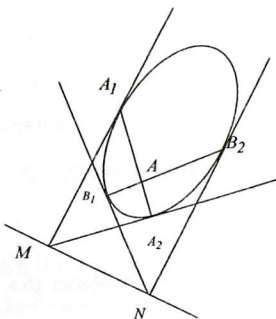
полярасына таандык болсо, анда A чекити B чекитинин полярасына таандык болот.

4°. $A \notin Q$ болгон учурда A чекитинин полярасын түзөлү. A чекитинен Q ийрисиине (AN) жана (AP) жанымаларын жүргүзөбүз. 1° касиет боюнча N чекитинин полярасы болуп (AN) түз

сызыгы эсептелет, б.а. N чекитинин полярасы A чекити аркылуу



56-сүрөт



57-сүрөт

өтөт. Анда 3^0 касиет боюнча A чекитинин полярасы N чекити аркылуу өтөт.

P чекити үчүн ушуга эле окшош ой жүгүртүү менен A чекитинин полярасы P чекити аркылуу өтө тургандыгын көрөбүз. Чекиттин полярасы жалгыз болгондуктан, A чекитинин полярасы болуп (NP) түз сызыгы эсептелет.

Эгерде A чекити аркылуу Q ийрисине бир дагы жаныма жүргүзө албасак, анда A чекитин Q ийрисине карата *ички чекит* деп аташат. Бул учурда A чекитинин полярасын түзүү 57-сүрөттө көрсөтүлгөн. A чекитинин полярасы (MN) түз сызыгы болот, $M - A_1$ жана A_2 чекиттериндеги ийринин жанымаларынын кесилиш чекити, $N - B_1, B_2$ чекиттериндеги ийринин жанымаларынын кесилиш чекити.

1-Мисал. Проективдик тегиздикте Q экинчи тартиптеги ийриси $(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$ теңдемеси менен берилген. Төмөндөгү чекиттердин поляраларынын теңдемелерин жазгыла:

а) $P(1, 1, 0)$; б) $A(0, 1, -2)$; в) $B(1, 1, 1)$; г) $C(0, 1, 2)$.

Чыгаруу.

а) Эгерде Q кубулбаган (б.а. $\det(a_{ij}) \neq 0$) экинчи тартиптеги ийриси

$$a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + a_{33}(x^3)^2 + 2a_{12}x^1x^2 +$$

$$+ 2a_{13}x^1x^3 + 2a_{23}x^2x^3 = 0$$

тендемеси менен берилсе, анда $P(p^1, p^2, p^3)$ чекитинин Q ийрисине карата полярасы төмөндөгүдөй тендеме менен аныкталат:

$$(a_{11}p^1 + a_{21}p^2 + a_{31}p^3)x^1 + (a_{12}p^1 + a_{22}p^2 + a_{32}p^3)x^2 + (a_{13}p^1 + a_{23}p^2 + a_{33}p^3)x^3 = 0,$$

мында x^1, x^2, x^3 төрдүн коэффициенттери бир учурда нөлгө барабар болушпайт. Каралып жаткан мисалда берилген ийри үчүн $a_{11} = a_{22} = 1, a_{33} = -1, a_{12} = a_{23} = a_{13} = 0$.

Коэффициенттердин бул маанилерин жана $P(1, 1, 0)$ чекитинин координаталарын поляранын тендемесине ордуна коюп, изделүүчү тендемени алабыз: $x^1 + x^2 = 0$.

Өз алдынча иштөө үчүн маселелер

1. Q экинчи тартиптеги ийриси $(x^1)^2 + (x^2)^2 - 2x^2x^3 = 0$ тендемеси менен берилген. Бул ийриге карата $M(1, 1, 1)$ жана $N(-1, 1, 1)$ чекиттеринин m жана n поляраларынын тендемелерин жана $n \cap m = P$ чекитинин p полярасынын

теңдемелерин жазгыла, p жана (MN) түз сызыктарынын теңдемелерин салыштыргыла.

2. Экинчи тартиптеги ийри $(x^1)^2 + (x^2)^2 - 2x^2x^3 = 0$ теңдемеси менен берилген. Төмөндөгү түз сызыктардын полюстарын тапкыла:

а) $x^1 = 0$; б) $x^1 + x^2 = 0$; в) $x^1 + x^2 + x^3 = 0$.

3. Толук төрт чокулуктун чокулары овалдык экинчи тартиптеги ийриде жатышат. Толук төрт чокулуктун ар бир диагоналдык чекити калган эки диагоналдык чекит аркылуу өтүүчү диагоналдын полюсу боло тургандыгын далилдегиле.

4. Кеңейтирилген тегиздикте овалдык экинчи тартиптеги ийри, M чекити жана m түз сызыгы берилген. Берилген ийриге карата M чекитине түйүндөш болгон $N \in m$ чекитин түзгүлө.

5. Кеңейтирилген тегиздикте овалдык экинчи тартиптеги ийри жана p түз сызыгы берилген. Берилген p түз сызыгынын полюсун түзгүлө:

а) p түз сызыгы берилген ийрини кесип өтпөйт;

б) p түз сызыгы берилген ийрини кесип өтөт.

6. Кеңейтирилген тегиздикте овалдык экинчи тартиптеги ийри берилген. M - берилген ийриге карата сырткы чекит болсун. Ушул M чекит аркылуу өтүүчү берилген ийринин жанымаларын түзгүлө.

7. $(4, 1, -1)$ координаталары менен берилген түз сызыкта

$$Q: (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 + 2x^1x^2 + 4x^1x^3 = 0 \quad \text{экинчи}$$

тартиптеги ийрисине карата берилген $A(-3, 1, -3)$ чекити менен түйүндөш болгон чекитти тапкыла.

8. $l: 2x^1 - x^2 - 9x^3 = 0$ түз сызыгында төмөнкү ийриге карата $A(-1, 2, 1)$ чекитине түйүндөш болгон чекитти тапкыла:

$$Q: (x^1)^2 - (x^2)^2 + 3(x^3)^2 + 2x^1x^2 + 2x^1x^3 - 6x^2x^3 = 0.$$

9. $Q: 2(x^1)^2 + (x^2)^2 - 2(x^3)^2 - 6x^1x^2 + 4x^2x^3 = 0$ экинчи тартиптеги ийриси берилген. $A(2, -5, 5)$, $C(0, 2, -1)$ чекиттеринин Q ийрисине карата поляраларынын теңдемесин жазгыла.

10. $Q: (x^2)^2 + 4x^1x^3 = 0$ экинчи тартиптеги ийрисине карата $l(0, -1, 2)$ түз сызыгынын полюсун тапкыла.

11. $m: x^1 + x^2 + x^3 = 0$ түз сызыгынын

$Q: (x^2)^2 - 2x^1x^2 + 4x^1x^3 = 0$ экинчи тартиптеги ийрисине карата полюсу жана берилген $A(3, -1, 1)$ чекити аркылуу өтүүчү түз сызыктын теңдемесин жазгыла.

12. $l: 2x^1 + x^2 - x^3 = 0$ түз сызыгы менен $A(-3, 1, 2)$ чекитинин $Q: (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 + 4x^1x^2 - 6x^2x^3 = 0$ экинчи тартиптеги ийрисине карата полярасынын кесилиш чекити табылсын.

13. Экинчи тартиптеги $Q: (x^1)^2 - (x^3)^2 + 2x^2x^3 = 0$ ийриси берилген. $a: x^1 + x^2 + x^3 = 0$ жана $b: 2x^1 - x^2 = 0$ түз сызыктарынын Q ийрисине карата A жана B полюстарын тапкыла жана (AB) түз сызыгынын Q ийрисине карата полюсунун координаталарын аныктагыла.

14. $Q: (x^1)^2 + (x^2)^2 - 2x^2x^3 = 0$ экинчи тартиптеги ийриси берилген. $A(2, 1, 0)$ жана $B(-1, 1, 1)$ чекиттеринин Q ийрисине карата (тишелеш түрдө) a жана b поляраларынын теңдемелерин жазгыла жана $C = a \cap b$ чекитинин ушул эле экинчи тартиптеги ийриге карата полярасын тапкыла. C чекитинин полярасы (AB) түз сызыгы менен дал келе тургандыгын көрсөткүлө.

13-лекция. Проективдик тегиздиктеги экинчи тартиптеги
ийрилердин классификациясы (түркүмдөргө
ажыралышы)

P_2 проективдик тегиздиктеги $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$
проективдик реперине карата Q экинчи тартиптеги ийриси (1)
теңдемеси менен берилген:

$$a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + a_{33}(x^3)^2 + 2a_{12}x^1x^2 +$$

$$+ 2a_{13}x^1x^3 + 2a_{23}x^2x^3 = 0. \quad (1)$$

P_2 проективдик тегиздигин жаратуучу үч ченемдүү вектордук
мейкиндикти V_3 аркылуу белгилейли. $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\} = B$ -
вектордук мейкиндиктин \mathfrak{R} проективдик репери менен
макулдашылган базиси болсун. Q ийрисинин каалагандай
 $M(x^1, x^2, x^3)$ чекитин жана бул чекитти жаратуучу $\bar{m} \in V_3$
векторун алабыз. B базисине карата \bar{m} вектору $\{x^1, x^2, x^3\}$
координаталарына ээ болот.

(1) барабардыктын сол жагын карайлы. Эгерде x^1, x^2, x^3
төрдү \bar{m} векторунун координаталары катары эсептесек, анда
 $\Phi(X) = a_{ij}x^i x^j$ туюнтмасы (бул болсо (1) теңдеменин сол жагы)
 V_3 вектордук мейкиндигиндеги B базисине карата жазылган
квадраттык форма болот ($i, j = 1, 2, 3$). Демек, проективдик

тегиздиктеги экинчи тартиптеги ийрилерди изилдөөгө квадраттык формалардын теориясын колдоно алабыз. V_3 вектордук мейкиндигинде квадраттык форма каноникалык же нормалдык көрүнүшкө ээ боло тургандай $B' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3\}$ базиси жашайт.

$$\Phi(X) = \varepsilon_1(\tilde{x}^1)^2 + \varepsilon_2(\tilde{x}^2)^2 + \varepsilon_3(\tilde{x}^3)^2, \quad (2)$$

мында $\varepsilon_i = \pm 1, 0$ жана $\Phi(X)$ квадраттык формасынын рангы өзгөрбөйт, ал эми индекси (б.а. (2) туюнтмадагы терс коэффициенттердин саны) квадраттык форманы каноникалык түргө келтирүүнүн жолунан (ыкмасынан) көз каранды болбойт.

$B' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3\}$ базиси $\mathcal{R}' = \{A'_1, A'_2, A'_3, E'\}$ проективдик реперин жаратат. Бул реперге карата Q экинчи тартиптеги ийрисинин теңдемеси төмөндөгүдөй көрүнүштө жазылат:

$$\varepsilon_1(\tilde{x}^1)^2 + \varepsilon_2(\tilde{x}^2)^2 + \varepsilon_3(\tilde{x}^3)^2 = 0, \quad (3)$$

мындагы $\varepsilon_i = \pm 1, 0$.

Төмөндөгүдөй учурлардын болушу мүмкүн.

1. Q ийрисинин (1) теңдемесинин сол жагындагы коэффициенттерден түзүлгөн A матрицасынын рангы 3 кө барабар.

а) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ - бирдей белгиге ээ болсун, анда (3) тендеме төмөнкүдөй көрүнүштө болот (чекиттердин координаталарын x^1, x^2, x^3 аркылуу белгилеп коелу):

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0.$$

Мындай тендеме менен берилген сызыкты *нолдук сызык* деп аташат.

б) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1, \varepsilon_3 = -1$ болсун, анда Q ийрисиинин каноникалык тендемеси

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$$

көрүнүшүнө келет. Бул тендеме менен аныкталган сызык *овалдык сызык* деп аталат.

2. $\text{rang} A = 2$ болгон учур.

а) Эгерде $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1, \varepsilon_3 = 0$ болсо, анда төмөндөгүдөй каноникалык тендемеге ээ болобуз:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0.$$

Бул *түгөй кесилишүүчү мнимый түз сызыктардын* тендемеси.

б) Эгерде $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = -1, \varepsilon_3 = 0$ болсо, анда ийринин каноникалык тендемеси

$$(x^1)^2 - (x^2)^2 = 0$$

көрүнүшүнө келет. Бул теңдеме *түгөй кесилишүүчү чыныгы түз сызыктарды* аныктайт.

3. $\text{rang} A = 1$ болгон учурда ийринин каноникалык теңдемеси $(x^1)^2 = 0$ көрүнүшүндө болот. Бул теңдеме *түгөй дал келүүчү түз сызыктарды* аныктайт.

Ошентип, проективдик тегиздикте экинчи тартиптеги ийрилердин беш түрү жашайт экен. Экинчи тартиптеги ийрилерди жогоруда көрсөтүлгөндөй түркүмдөргө ажыратуу $\Phi(X)$ квадраттык формасынын рангы жана индекси боюнча жүргүзүлдү. Квадраттык форманын рангы жана индекси ар кандай проективдик өзгөртүүлөрдө сакталат. Ошондуктан, экинчи тартиптеги ийрилердин жогоруда көрсөтүлгөн беш түрү проективдик өзгөртүүдө бири-бирине өтпөйт.

Q ийрисинин (1) теңдемесине тиешелүү квадраттык форманы каноникалык түргө келтирүүнү Лагранждын методу [6] менен жүргүзүүгө болот.

1-Мисал. Экинчи тартиптеги ийринин төмөндөгү теңдемесин каноникалык түргө келтиргиле жана түрүн аныктагыла:

$$4(x^1)^2 + (x^2)^2 + 2x^1x^3 + 2x^2x^3 = 0.$$

Чыгаруу.

1-жол. Лагранждын методун колдонуп, ийринин теңдемесин каноникалык түргө келтиребиз.

$$2\left((x')^2 + x'x^2 + \frac{1}{4}(x^2)^2\right) - \frac{1}{2}(x^2)^2 + (x^2)^2 + 2x^2x^3 = 0,$$

$$2\left(x' + \frac{1}{2}x^2\right)^2 + \frac{1}{2}\left((x^2)^2 + x^2x^3 + \frac{1}{4}(x^3)^2\right) - \frac{1}{2}(x^3)^2 = 0,$$

$$2\left(x' + \frac{1}{2}x^2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{2}x^3\right)^2 - \frac{1}{2}(x^3)^2 = 0.$$

Өзгөрүлмөлөрдү алмаштыралы:

$$y' = \sqrt{2}\left(x' + \frac{1}{2}x^2\right);$$

$$y^2 = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(x^2 + \frac{1}{2}x^3\right);$$

$$y^3 = \sqrt{\frac{1}{2}}x^3.$$

Анда төмөндөгүөй овалдык ийриге ээ болобуз:

$$(y')^2 + (y^2)^2 - (y^3)^2 = 0.$$

2-жол. Экинчи тартиптеги ийринин теңдемесинин сол жагындагы коэффициенттерден түзүлгөн матрицанын рангы үчкө барабар, себеби

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Демек, экинчи тартиптеги ийри – кубулбаган ийри. Ошондуктан ал же мнимый кубулбаган ийрилердин түркүмүнө, же овалдык ийрилердин түркүмүнө таандык болот.

$(0, 0, 1)$ чекити экинчи тартиптеги ийриде жатат (түздөн түз текшерип көрсөк: $4 \cdot 0 + 0 + 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0$), демек берилген ийри овалдык ийри болот жана анын каноникалык теңдемеси

$$(y^1)^2 + (y^2)^2 - (y^3)^2 = 0$$

көрүнүшүндө болот.

2-Мисал. Q экинчи тартиптеги ийриси $2(x^1)^2 + (x^2)^2 - 2(x^3)^2 - 6x^1x^2 + 4x^2x^3 = 0$ теңдемеси менен берилген. $M(2, -1, 5)$ чекитинин полярасынын теңдемесин жазгыла.

Чыгаруу. Q экинчи тартиптеги ийрисине карата $A(a^1, a^2, a^3)$ чекитинин полярасынын теңдемеси төмөндөгүдөй болот:

$$\Phi_1(A)x^1 + \Phi_2(A)x^2 + \Phi_3(A)x^3 = 0,$$

мында $\Phi_1(A) = a_{11}a^1 + a_{12}a^2 + a_{13}a^3,$

$$\Phi_2(A) = a_{21}a^1 + a_{22}a^2 + a_{23}a^3,$$

$$\Phi_3(A) = a_{31}a^1 + a_{32}a^2 + a_{33}a^3.$$

Биздин учурда $a_{11} = 2, a_{12} = -3, a_{22} = 1, a_{33} = -2, a_{23} = 2.$

$A = M(2, -1, 5).$ Табабыз:

$$\Phi_1(M) = 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 7;$$

$$\Phi_2(M) = (-3) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 = 3;$$

$$\Phi_3(M) = 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 5 = -12.$$

Демек, поляранын теңдемеси: $7x^1 + 3x^2 - 12x^3 = 0$ көрүнүшүндө болот.

3-Мисал. $2(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 + 3x^1x^2 - x^1x^3 + 2x^2x^3 = 0$ теңдемеси менен берилген экинчи тартиптеги ийринин берилген түз сызык менен кесилиш чекиттерин тапкыла:

а) $y^1 = 5\lambda - \mu; y^2 = -\mu; y^3 = 2\lambda + \mu.$

б) $x^1 - 2x^2 + x^3 = 0.$

Чыгаруу.

а) Кесилиш чекиттердин координаталарын табуу үчүн төмөндөгүдөй системаны чыгарабыз.

$$\begin{cases} 2(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 + 3x^1x^2 - x^1x^3 + 2x^2x^3 = 0, \\ y^1 = 5\lambda - \mu; y^2 = -\mu; y^3 = 2\lambda + \mu. \end{cases}$$

Мындан

$$\begin{aligned} & 2(5\lambda - \mu)^2 + 9\mu^2 - (-2\lambda + \mu)^2 - 9\mu(5\lambda - \mu) - \\ & - (5\lambda - \mu)(-2\lambda + \mu) + 2(-\mu)(-2\lambda + \mu) = 0 \end{aligned}$$

же

$$\begin{aligned} & 50\lambda^2 - 20\lambda\mu + 2\mu^2 + 9\mu^2 - 4\lambda^2 + 4\lambda\mu - \mu^2 - 45\lambda\mu + \\ & + 9\mu^2 + 10\lambda^2 - 2\lambda\mu - 5\lambda\mu + \mu^2 + 12\lambda\mu - 6\mu^2 = 0 \end{aligned}$$

келип чыгат. Акыркыдан

$$56\lambda^2 - 56\lambda\mu + 14\mu^2 = 0$$

теңдемесине ээ болобуз. Мындан

$$\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 - 4\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) + 4 = 0,$$

$$\frac{\mu}{\lambda} = 2, \quad \lambda = 1, \quad \mu = 2,$$

же $M(1, -2, 0)$ чекитине ээ болобуз.

б) экинчи тартиптеги ийри менен түз сызыктын кесилиш чекиттеринин координаталары төмөндөгүдөй системаны канааттандырышат:

$$\begin{cases} 2(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 + 3x^1x^2 - x^1x^3 + 2x^2x^3 = 0, \\ x^1 = 2x^2 - x^3. \end{cases}$$

Мындан

$$\begin{cases} x^1 = 2x^2 - x^3, \\ 15(x^2)^2 - 11x^2x^3 + 2(x^3)^2 = 0. \end{cases}$$

системасы келип чыгат. Анда

$$(x^1)_1 = -\frac{1}{3}; \quad (x^1)_2 = -\frac{1}{5}x^3.$$

$$M_1\left(-\frac{1}{3}x^3, -\frac{1}{3}x^3, x^3\right) \text{ же } M_1(-1, 1, 3);$$

$$M_2\left(-\frac{1}{5}x^3, -\frac{1}{5}x^3, x^3\right) \text{ же } M_2(-1, 2, 5) \text{ чекиттерине ээ}$$

болобуз.

Өз алдынча иштөө үчүн маселелер

Экинчи тартиптеги ийрилердин төмөндөгү теңдемелерин каноникалык түргө келтиргиле жана алардын түркүмүн аныктагыла:

а) $2(x^1)^2 + 3(x^2)^2 + 4(x^3)^2 - 2x^1x^2 - 6x^2x^3 + 2x^1x^3 = 0;$

б) $(x^1)^2 + 3(x^2)^2 + (x^3)^2 + 4x^1x^2 + 2x^2x^3 + 2x^1x^3 = 0;$

в) $(x^1)^2 + 2(x^2)^2 - (x^3)^2 + 2x^1x^3 = 0;$

г) $2(x^1)^2 + (x^3)^2 - 2x^1x^2 + 2x^1x^3 = 0;$

д) $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + 2x^1x^2 + 4x^1x^3 - 2x^2x^3 = 0;$

е) $(x^1)^2 + (x^2)^2 + 4(x^3)^2 - 2x^1x^2 + 4x^1x^3 - 4x^2x^3 = 0;$

ж) $(x^1)^2 - 3(x^3)^2 - 2x^1x^2 - 6x^2x^3 + 2x^1x^3 = 0.$

14-лекция. Бекемделген түз сызыгы менен берилген проективдик тегиздиктеги геометрия

P_2 - чыныгы сандардын талаасынын үстүндө берилген проективдик тегиздик болсун. Бул тегиздикте кандайдыр бир F

фигурасын алабыз жана бул фигураны өзүнө өзүн өткөрө тургандай тегиздикти проективдик өзгөртүүлөрдүн көптүгүн карайбыз. Ушул көптүктү $H_F = \{f \mid f(F) = F\}$ көрүнүшүндө белгилеп коелу. H_F көптүгү өзгөртүүлөрдүн композициясына карата группаны түзө тургандыгын көрсөтөбүз.

Чындыгында $f \in H_F, g \in H_F \Rightarrow g \cdot f \in H_F$, себеби $f(F) = F, g(F) = F$ болгондуктан,

$gf(F) = g(f(F)) = g(F) = F$ келип чыгат.

$f \in H_F \Rightarrow f^{-1} \in H_F$ экендигин көрсөтөлү:

$f^{-1}(F) = f^{-1}(f(F)) = F \Rightarrow f^{-1} \in H_F.$

H_F группасы F фигурасынын *стационардык группасы* деп аталат.

F фигурасынын ордуна проективдик тегиздиктеги d_0 түз сызыгын алабыз жана ушул түз сызыктын стационардык группасын карайлы.

Теорема. d_0 түз сызыгынын стационардык группасы H_{d_0} аффиндик тегиздикти аффиндик өзгөртүүлөрдүн группасына изоморфттуу болот.

Далилдөө. P_2 тегиздигинде $\mathfrak{R} = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ проективдик реперин алабыз жана $A_1 \in d_0, A_2 \in d_0$ болсун дейли. \mathfrak{R} реперине карата ар кандай тегиздикти проективдик

өзгөртүү төмөндөгүдөй формулалар менен аныктала тургандыгы жогортон (8-лекцияны карагыла) билебиз:

$$\begin{cases} \lambda y^1 = c_1^1 x^1 + c_2^1 x^2 + c_3^1 x^3, \\ \lambda y^2 = c_1^2 x^1 + c_2^2 x^2 + c_3^2 x^3, \\ \lambda y^3 = c_1^3 x^1 + c_2^3 x^2 + c_3^3 x^3, \end{cases} \quad \det \|c_\alpha^\beta\| \neq 0. \quad (1)$$

(1) өзгөртүүлөрдүн арасынан H_{d_0} камтылуучу группасын бөлүп алабыз. d_0 түз сызыгынын тедемеси төмөндөгүдөй көрүнүштө болот:

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{же} \quad x^3 = 0.$$

$f \in H_{d_0}$ болсун, анда f өзгөртүүсүнүн формулалары (1) көрүнүштө болот жана $\forall M \in d_0$ чекити үчүн $f(M) = M' \in d_0$ орун алат. Эгерде M чекитинин \mathfrak{R} реперине карата координаталары $(x^1, x^2, 0)$ болсо, анда $M'(y^1, y^2, 0)$ болот. M жана M' чекиттеринин координаталарын (1) формулага ордуларына коебуз:

$$\begin{cases} \lambda y^1 = c_1^1 x^1 + c_2^1 x^2, \\ \lambda y^2 = c_1^2 x^1 + c_2^2 x^2, \\ 0 = c_1^3 x^1 + c_2^3 x^2. \end{cases}$$

x^1, x^2 - бир учурда нөлгө барабар болушпаган чыныгы сандар.

Ошондуктан $c_1^3 = c_2^3 = 0$ келип чыгат. Анда $f \in H_{d_0}$

өзгөртүүсүнүн формулалары төмөндөгүдөй көрүнүшкө келет:

$$\begin{cases} \lambda y^1 = c_1^1 x^1 + c_2^1 x^2 + c_3^1 x^3, \\ \lambda y^2 = c_1^2 x^1 + c_2^2 x^2 + c_3^2 x^3, \\ \rho y^3 = c_3^3 x^3, \end{cases} \quad (2)$$

мындагы $\begin{vmatrix} c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \\ 0 & 0 & c_3^3 \end{vmatrix} \neq 0$, б.а. $c_3^3 \begin{vmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \end{vmatrix} \neq 0$ болгондуктан,

акыркы барабарсыздыктан

$$\begin{vmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad c_3^3 \neq 0 \quad (3)$$

экендигин көрөбүз.

Ошентип, эгерде M чекити d_0 түз сызыгына таандык жана $f \in H_{d_0}$ болсо, б.а. f проективдик өзгөртүүсү (2) формулалар менен аныкталса, анда $f(M) = M'$ чекити да d_0 түз сызыгына таандык болот. Эгерде $M \notin d_0$ болсо, анда $x^3 \neq 0$ болот. Демек, $f(M) = M' \notin d_0$ (себеби (2) формулалардан бул учурда $y^3 \neq 0$ экендиги көрүнүп турат).

Ошентип, (2) формулалар менен аныкталган f проективдик өзгөртүүсүн $A = P_2 \setminus d_0$ көптүгүн проективдик өзгөртүү катары кароого болот. Анда H_{d_0} группасы A көптүгүн өзгөртүүлөрдүн группасы болуп эсептелет.

$\forall M \in A$ чекитин алалы. Анда M жана $f(M) = M'$ чекиттеринин үчүнчү координаталары нөлдөн айырмалуу болушат. Демек, A көптүгүнүн чекиттери үчүн (2) формуланы төмөндөгүдөй жазууга болот:

$$\begin{cases} \frac{y^1}{y^3} = \frac{c_1^1}{c_3^3} \cdot \frac{x^1}{x^3} + \frac{c_2^1}{c_3^3} \cdot \frac{x^2}{x^3} + \frac{c_3^1}{c_3^3}, \\ \frac{y^2}{y^3} = \frac{c_1^2}{c_3^3} \cdot \frac{x^1}{x^3} + \frac{c_2^2}{c_3^3} \cdot \frac{x^2}{x^3} + \frac{c_3^2}{c_3^3}. \end{cases} \quad (4)$$

$$x = \frac{x^1}{x^3}, \quad y = \frac{x^2}{x^3}, \quad \tilde{x} = \frac{y^1}{y^3}, \quad \tilde{y} = \frac{y^2}{y^3}, \quad a_1 = \frac{c_1^1}{c_3^3},$$

$$b_1 = \frac{c_2^1}{c_3^3}, \quad c_1 = \frac{c_3^1}{c_3^3}, \quad a_2 = \frac{c_1^2}{c_3^3}, \quad b_2 = \frac{c_2^2}{c_3^3}, \quad c_2 = \frac{c_3^2}{c_3^3}$$

белгилөөлөрүн киргизели. Анда (4) формулалар төмөндөгүдөй көрүнүшкө келет:

$$\begin{cases} \tilde{x} = a_1 x + b_1 y + c_1, \\ \tilde{y} = a_2 x + b_2 y + c_2. \end{cases} \quad (5)$$

(3) барабардыктарды эске алсак, анда $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ экендигин көрөбүз.

(5) формулалар - A көптүгүн өзгөртүүлөрдүн формулалары (бир тектүү эмес (x, y) координаталар үчүн жазылган).

Бул формулалар, биринчи жактан, H_{d_0} группасын мүнөздөйт, экинчи жактан, алар аффиндик тегиздикте аффиндик өзгөртүүлөрдү аныкташат.

Ошентип, A көптүгүн өзгөртүүлөрдүн H_{d_0} группасы аффиндик тегиздикти аффиндик өзгөртүүлөрдүн группасына изоморфтуу болот экен.

A көптүгүндө аффиндик тегиздиктин түзүлүшүн аныктоого боло тургандыгын (б.а. A көптүгү аффиндик тегиздиктин модели экендигин) көрсөтөлү.

Аналитикалык геометрия курсунан төмөндөгү аныктоону эске салалы.

Каалагандай $E \neq 0$ көптүгүн алалы. Бул көптүктүн элементтерин шарттуу түрдө чекиттер деп атап, латын тамгаларынын баш тамгалары менен белгилейбиз. V - чыныгы сандардын талаасынын үстүндө аныкталган вектордук мейкиндик болсун.

Эгерде төмөндөгү шарттарды (аксиомаларды) канаатандыра тургандай $\sigma : E \times E \rightarrow V$ чагылтуусу берилген болуп жана

1) бекемделген $A \in E$ чекити жана каалагандай $\vec{x} \in V$ вектору

үчүн $\vec{AB} = \vec{x}$ боло тургандай $B \in E$ чекити жашаса;

2) $\forall A, B, C \in E$ чекиттери үчүн

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

орун алса;

3) $\vec{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A \equiv B$ болсо,

анда E көптүгүндө *аффиндик мейкиндиктин түзүлүшү аныкталган* деп айтышат.

P_2 проективдик тегиздикти жаратуучу вектордук мейкиндик V_3 болсун. T аркылуу $d_0 \subset P_2$ түз сызыгын жаратуучу (б.а. $\pi(T) = d_0$) векторлордун көптүгүн белгилейли:

$T \subset V_3$, демек $T \cup \{\vec{0}\} = V_2 \subset V_3$.

\mathfrak{R} реперине карата d_0 түз сызыгынын теңдемеси $x^3 = 0$ көрүнүшүндө болгондуктан, бул түз сызыктын чекитин жаратуучу каалагандай \vec{x} вектору $(x^1, x^2, 0)$ координаталарына ээ болот (вектордук базиске карата). Тескерисинче, $\vec{x} = \{x^1, x^2, 0\}$ вектору d_0 түз сызыгында жаткан M чекитин

Эгерде $M \notin d_0$ болсо (б.а. $M \in A$ болсо), анда $x^3 \neq 0$ болот. Анда бул чекитти жаратуучу \bar{m} векторунун координаталары $\{x^1, x^2, x^3\}$ көрүнүшүндө болот жана $x^3 \neq 0$. Биз \bar{m} векторунун ордуна ага коллинеардуу болгон $\frac{1}{x^3} \bar{m} = \{x^{1'}, x^{2'}, 1\}$ векторду алышыбыз мүмкүн, б.а. $A = P \setminus d_0$ көптүгүнүн чекиттерин жаратуучу векторлор катары ар дайым үчүнчү координаталары 1 ге барабар болгон векторлорду алууга болот.

Эми $\sigma : A \times A \rightarrow V$ чагылтуусун аныктайлы.

$M, N \in A$ чекиттерин алабыз. $\bar{m} = \{x^1, x^2, 1\}$ аркылуу M чекитин жаратуучу (б.а. $\pi(\bar{m}) = M$), $\bar{n} = \{y^1, y^2, 1\}$ аркылуу N чекитин жаратуучу (б.а. $\pi(\bar{n}) = N$) векторду белгилейли. $\bar{n} - \bar{m} = \{y^1 - x^1, y^2 - x^2, 0\} \in V_2$ векторун карайбыз. $\sigma(M, N) = \bar{n} - \bar{m}$ деп алалы. Ушундайча аныкталган σ чагылтуусу аффиндик мейкиндиктин аксиомаларын канаатандыра тургандыгын далилдейбиз.

1) $\forall M \in A, \forall \bar{x} \in V_2$ үчүн $\sigma(M, N) = \overrightarrow{MN} = \bar{x}$ боло тургандай $N \in A$ чекитинин жашай тургандыгын көрсөтөлү.

$\bar{n} - \bar{m} = \bar{0} \Rightarrow \bar{n} = \bar{m} \Rightarrow \pi(\bar{n}) \equiv \pi(\bar{m})$. Демек, $M \equiv N$.

Опертип, σ чагылтуусу $A = P_2 \setminus d_0$ көптүгүндө аффиндик мейкиндиктин түзүлүшүн аныктайт экен жана $\dim A = \dim V_2 = 2$.

Башкача айтканда $A = P_2 \setminus d_0$ - аффиндик тегиздик болот экен.

Өз алдынча иштөө үчүн тапшырмалар

1. Аффиндик тегиздиктин $A = P_2 \setminus d_0$ моделинде түз сызыктардын параллелдүүлүк түшүнүгүн аныктагыла.
2. $A = P_2 \setminus d_0$ тегиздигиндеги каалагандай d аффиндик түз сызыгы берилген. $\forall M, N, L \in d$ чекиттери үчүн алардын жөнөкөй катышын аныктагыла.
3. Аффиндик тегиздиктин проективдик моделиндеги ($A = P_2 \setminus d_0$ көптүгүндөгү) экинчи тартиптеги сызыктарды аныктагыла.
4. Евклиддик тегиздиктин проективдик модели аныктагыла.
5. Евклиддик тегиздиктин проективдик моделиндеги перпендикуляр түз сызыктардын аныктоосун бергиле.

Адабияттар

1. Адамар Н.С. Элементарная геометрия. М: Просвещение, 1957. ч.І.-608с.
2. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. М.: Просвещение, 1986.ч.І.-335с.
3. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. М.: Просвещение, 1987.ч.ІІ.-352с.
4. Атанасян Л.С., Атанасян В.А. Сборник задач по геометрии. М.: Просвещение, 1973.ч.І.-256с.
5. Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П. Геометрия. М.:Просвещение, 1975. ч.І.-351с.
6. Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П. Геометрия. М.:Просвещение, 1975. ч.ІІ.-367с.
7. Горшкова Л.С., Паньженский В.И., Марина Е.В. Проективная геометрия. М.: Издательство ЛКИ, 2007. -168с.
8. Гуревич Г.Б. Проективная геометрия. М., 1960, - 220с.
9. Костин В.И. Основания геометрии. М-Л.: Учпедгиз., 1946, - 320с.
10. Ефимов Н.В. Высшая геометрия. М.: Наука, 1978, - 576с.
11. Певзнер С.Л. Проективная геометрия. М.: Просвещение, 1980., -128с.
12. Сборник задач по геометрии // Под ред. Л.С.Атанасяна. М.: ЭСКМО, 2008., ч.ІІ. -320с.
13. Сборник задач по геометрии // Под ред. В.Т.Базылева М.: Просвещение, 1980, - 238с.
14. Четверухин Н.Ф. Проективная геометрия. М.: Просвещение, 1969.-368с.

12-лекция. Полюс жана поляра, алардын касиеттери	143
13-лекция. Проективдик тегиздиктеги экинчи тартиптеги ийрилердин классификациясы(түркүмдөргө ажыралышы) . . .	153
14-лекция. Бкемделген түз сызыгы менен берилген проективдик тегиздиктеги геометрия	162
Адабияттар	172
Предметтик көрсөткүч	176

Предметтик көрсөткүч

- А**
 аффиндик мейкиндиктин түзүлүшү 168
- Б**
 боонун төрт сызыгынын татаал катышы 79
 – тегиздикти проективдик өзгөртүү 87
 – проективдик чагылтуу 90
 – борбордук проекциялоо 7,8
- Г**
 гармоникалык төрт чекит 78
 – мнимый чекит 133
 – комплекстик проективдик тегиздик 133
 – комплекстик түйүндөш чекиттер 133
 – чындыгы түз сызык 134
 гомология 109
- Д**
 дал келүүчү түз сызык 156
 Дезаргдын конфигурациясы 66
 – төрт чекиттин татаал катышы 75
 –Дезаргдын теоремасы 65
- И**
 инволюция 91
 инварианттык чекит 93
 – проективдик өзгөртүүнүн инварианттык чекити 93
 инварианттык түз сызык 94
 – проективдик өзгөртүүнүн инварианттык түз сызыгы 94
- К**
 кеңейтирилген евклиддик мейкиндик 11
 коллинеация 88
 – проективдик мейкиндик 14
 – проективдик түз сызык (же бир ченемдүү проективдик мейкиндик) 15
 – проективдик тегиздик (же эки ченемдүү проективдик тегиздик) 15
 – проективдик мейкиндиктин модели 16
 – проективдик репер (проективдик түз сызыкта) 28
 – проективдик түз сызыкты жаратуучу вектордук мейкиндик 28
 – проективдик чекитти жаратуучу вектор 14
 – проективдик репер менен макулдашылган базис 28
 – проекция 5
 – чекиттин проекциясы 5
 – фигуранын проекциясы 5
 – түз сызыктын проекциясы 5
 – проективдик касиеттер 7
 – төрт чекиттин татаал катышы 8
 – проективдик түз сызыктагы чекиттин проективдик координаталары 29
 – проективдик тегиздиктеги проективдик репер 31
 – проективдик тегиздиктеги чекиттин проективдик координаталары 32
 – үч чокулук 33, 65
 – проективдик түз сызыктын параметрдик теңдемелери 43
 – проективдик түз сызыктын координаталары 44
 – проективдик координаталарды өзгөртүү 55
 – экилениш принциби 63
 – кичине экилениш принциби 63,64
 – чоң экилениш принциби 64
 кеңейтирилген тегиздик 10
 – өздүк эмес тегиздик 11

Автор жөнүндө маалымат:



Физика - математика илимдеринин доктору (01.01.04 – геометрия жана топология). ОшМУнун алгебра жана геометрия кафедрасынын башчысы, «Сынчыл ойлоону өстүрө тургандай окуу жана жазуу» программасынын эл аралык деңгээлдеги тренери.

Изилдөө проблемалары:

- Дифференцирленүүчү көп түспөлдүүлүктөрдү чагылтуулар, торчолор жана бөлүштүрүүлөр;
- Дифференциалдык теңдемелердин геометриялык теориясы;
- Математиканы жогорку окуу жайларда окутууда инновациялык методдорду колдонуунун өзгөчөлүктөрү.

100дөн ашуун илимий, илимий-усулдук макалалары, алты окуу колдонмосу, 1 монографиясы жарыкка чыккан.



971447